Marcin Tkaczyk

Katedra Logiki KUL
tkaczyk@kul.pl

L O G I K A

w y k ł a d k u r s o r y c z n y

Spis treści

Na co komu logika?

Felieton wygłoszony w radiu *eR* 18 maja 2010 r.

Każdy nauczyciel logiki bywa od czasu do czasu pytany o cel i sens uczenia się jego dyscypliny. Wybitny polski uczony, Tadeusz Kotarbiński, zwykł był w takich sytuacjach mawiać: „pytanie «na co komu logika?» powinno być rozpatrywane jako część szerszego problemu: «na co człowiekowi rozum?». Kto nie widzi potrzeby uczenia się logiki, ten nie do końca zdaje sobie sprawę z tego, do czego służy rozum. Każdy zaś, kto wie, do czego rozum służy, ma świadomość i tego, jak potrzebne jest wykształcenie jego naturalnej zdolności do jasnego myślenia, ścisłego wypowiadania się i poprawnego uzasadniania głoszonych tez.

Są tacy, którzy głoszą, że logika jest zbyt trudna, by zwykły śmiertelnik mógł wykształcić się w niej na jakimkolwiek rozsądnym poziomie. To, oczywiście, jest głupstwo. Skoro bowiem w cyrku słoń może opanować sztukę tańca, to należący do uniwersytetu reprezentant gatunku *homo sapiens* jest w stanie wyszkolić się w używaniu jednej matematycznej funkcji — interpretacji.

Można jednak spotkać ludzi, którzy wątpią w związek umiejętności logicznego myślenia ze studiowaniem teoretycznej logiki. Ludzie ci — czasem nawet naukowo utytuowani — przypisują sobie samym praktyczne umiejętności logiczne, przyznając się zarazem do tego, że logiki nigdy nie zdołali się nauczyć. Mylą się. Wierzą oni naiwnie we własne zdolności do jasnego myślenia, precyzyjnego wypowiadania się i poprawnego uzasadniania, ponieważ nie są w stanie dostrzec logicznych błędów, które notorycznie popełniają. Nie widząc własnych błędów logicznych, nie cierpią z ich powodu i upewniają samych siebie, że nie potrzebują kształcić się w logice. W ten sposób wpadają w zaklęty krąg nielogiczności. Gdyby zechcieli nauczyć się logiki, z przerażeniem odnosiliby się do nonsensów, które wcześniej wydawały się im być całkiem rozsądne, a nawet głębokie. Albowiem, jak napisał wielki logik, Jan Łukasiewicz, kto wykształcił się w logice matematycznej, temu jakby łuski spadają z oczu, widzi on błędy tam, gdzie inni ich nie dostrzegają, i dostrzega nonsensy tam, gdzie wielu widzi jakąś tajemniczą głębię.

Rzeczywiście, wyjąwszy zawodowych logików, studiujemy logikę nie po to, by coś — w domyśle: coś praktycznego — z nią zrobić. Raczej studiujemy logikę po to, by ona coś zrobiła z nami, w szczególności z naszym myśleniem. W pocie czoła wdrażając się w podstawowe rachunki logiczne, dzień po dniu, w rezultacie wielkiego wysiłku, przeżywszy liczne niebezpieczne przygody matematyczne i filozoficzne, wchodzimy w posiadanie skarbu kultury logicznej. Myśl człowieka logicznie wykształconego różni się bowiem od naturalnej zdolności do logicznego myślenia mniej więcej tak, jak mistrzowski skok narciarski wykształconego sportowca różni się od naturalnej zdolności do podskakiwania przy grze w klasy.

Rozdział 1

Wprowadzenie do rachunków logicznych

W strumieniu świadomości występują przeżycia poznawcze — takie, jak wyobrażenia, pojęcia, przekonania — i przeżycia dążeniowe — takie, jak akty woli, emocje. Sensem przeżyć poznawczych jest dostarczenie informacji o czymś, zaś ogół wiarygodnych informacji stanowi *wiedzę*. Do fundamentów zachodniej cywilizacji należy postanowienie uzanawania za wiarygodne tych przekonań, które są najlepiej *uzasadnione*. Ta idea została wyraźnie wypowiedziana po raz pierwszy przez Platona w dialogu *Fedon*. Główny bohater tego dzieła, Sokrates, postanawia akceptować zawsze te przekonania, za którymi przemawia najlepsze uzasadnienie. Logika jest to nauka o naturze, sposobach i wartości uzasadnienia.

1.1 Uzasadnianie przekonań

Przekonania, które stanowią przedmiot uzasadnienia, są swoistymi myślami. Myśli te są wypowiadane w *zdaniach*, które są tworami języka. Pojęcie zdania, którym posługujemy się w logice, różni się od pojęcia zdania znanego z filologii. W logice zdaniami nazywamy te wypowidzi, w których zdajemy sprawę ze stanu rzeczy. Zdaniem w sensie logicznym są więc te wypowiedzi, które nadają się do uzupełnienia zwrotów: „sądzę, że”, „uważam, że” i podobnych. Na przykład pytania i rozkazy nie są zdaniami w sensie logicznym. Zdanie, które trafnie zdaje sprawę ze stanu rzeczy, jest *prawdziwe*, a zdanie, które zdaje sprawę ze stanu rzeczy mylnie, jest *fałszywe*. Prawdę i fałsz nazywamy *wartościami logicznymi*.

Przyjmujemy więc, że wiedza składa się ze zdań, które nadają się do wypowiadania przekonań. Zdania mogą być dobrze lub źle uzasadnione. Mogą też być całkiem pozbawione uzasadnienia. zatem w logice badamy przekonania za pośrednictwem zdań.

Uzasadnienie bezpośrednie i pośrednie. Odróżniamy uzasadnienie bezpośrednie od pośredniego. Bezpośrednie uzasadnienie nazywa się *oczywistością*. Za bezpośrednio uzasadnione uznajemy te zdania, które są uzasadnione bez odwoływania się do innych zdań. To, które poszczególne zdania wolno uznać za bezpośrednio uzasadnione, jest sprawą wielce dyskusyjną. Najczęściej akceptowanymi kandydatami są zdania oparte wyłącznie na doświadczeniu zmysłowym (np. słońce świeci), zwane zdaniami *percepcyjnymi*, zdania oparte wyłącznie na doświadczeniu wewnętrznym (np. kocham Jadwinię), zwane zdaniami *introspekcyjnymi*, i zdania oparte wyłącznie na rozumieniu zawartych w nim znaków (np. żaden kawaler nie jest żonaty), zwane zdaniami *analitycznymi*. Granica między trzema wymienionymi sferami oczywistości oraz między oczywistością a jej brakiem jest problematyczna, ale — na szczęście — nie stanowi przedmiotu troski logików. Zauważamy tylko, że uzasadnienie bezpośrednie odgrywa ważną rolę w wiedzy i zalecamy ostrożność w wytyczaniu jego terytorium. Uwaga logików kieruje się ku uzasadnieniu pośredniemu, czyli *wnioskowaniu*. Polega ono na tym, że pewne zdanie jest uzasadniane za pomocą innych zdań. O zdaniu uzasadnionym pośrednio mówimy, że jest z owych innych zdań *wywnioskowane*.

Pojęcie wnioskowania. Wnioskowanie składa się z dowolnej liczby zdań, które nazywają się *przesłankami*, i z pojedyńczego zdania, które nazywa się *konkluzją* lub *wnioskiem*. Istota wnioskowania polega na tym, że przesłanki mają nadawać się na uzasadnienie konkluzji. Istotę wnioskowania stanowi więc *roszczenie do możliwości uzasadnienia konkluzji za pomocą przesłanek*. Zamiast o wnioskowaniu wolno też mówić o *rozumowaniu*.

W logice dokonujemy pewnej idealizacji. Przyjmujemy mianowicie, że każde wnioskowanie ma *standardową* postać, to znaczy, ma postać zbioru zdań, jedno z tych zdań jest wyróżnione jako wniosek, a pozostałe zdania są przesłankami. Zwykle oddzielamy przesłanki od wniosku poziomą linią: przesłanki występują nad linią, a wniosek pod linią. Na przykład zbiór zdań:

$$\begin{array}{l}\text{niektóre ssaki nie są oswojone,}\\ \text{wszystkie ssaki są kręgowcami,}\\ \hline \text{niektóre kręgowce nie są oswojone.}\end{array}$$

jest wnioskowaniem o dwóch przesłankach: „niektóre ssaki nie są oswojone", „wszystkie ssaki są kręgowcami" i konkluzji: „niektóre kręgowce nie są oswojone". Niekiedy, zamiast poziomej linii, do oddzielenia przesłanek od wniosku używany jest znak „$\therefore$", czyli trójkropek:

niektóre ssaki nie są oswojone,
wszystkie ssaki są kręgowcami,
$\therefore$ niektóre kręgowce nie są oswojone.

Podkreślmy jeszcze, że kolejność przesłanek jest obojętna. Istotne jest natomiast wyraźne wskazanie wniosku.

We wnioskowaniach, z którymi spotykamy się w różnych sytuacjach, odróżnienie wniosku od przesłanek nie zawsze jest łatwym zadaniem. Co więcej, nie zawsze jest całkiem jasne, czy w ogóle mamy do czynienia z wnioskowaniem. W wielu wypadkach sygnałem, że mamy do czynienia z wnioskiem, mogą być zwroty: „więc”, „wobec tego”, „a zatem”, „z tego wynika”, „w konsekwencji”, „w rezultacie”, „można stąd wywnioskować”, „musi” i podobne. Sygnałem, że mamy do czynienia z przesłanką, mogą być zwroty: „ponieważ”, „bowiem”, „albowiem”, „pod warunkiem”, „przy założeniu”, „skoro” i podobne. Nie ma jednak niezawodnych znaków, pozwalających na odróżnienie konkluzji od przesłanek. Wszystkie wymienione zwroty pełnią też inne funkcje. Ocena tego, czy mamy do czynienia z wnioskowaniem, i tego, jakie są przesłanki i konkluzja tego wnioskowania, wymaga nieraz głębszego namysłu nad sensem badanego tekstu, uwzględnienia szerszego kontekstu, a zwłaszcza dociekania intencji autora. W logice zakładamy, że tę czynność już wykonano, że każde wnioskowanie ma standardową postać.

Poprawność wnioskowania. Zależnie od intencji osoby, która powołuje się na wnioskowanie, można odróżnić wnioskowanie *kategoryczne* i *hipotetyczne*. Z kategorycznym wnioskowaniem mamy do czynienia wtedy, gdy osoba wnioskująca akceptuje z pewnym stopniem przekonania wszystkie przesłanki jako prawdziwe i traktuje je jako uzasadnienie konkluzji. W hipotetycznym wnioskowaniu wartość logiczna przesłanek jest obojętna. Wedle osoby wnioskującej przesłanki — gdyby ewentualnie okazały się prawdziwe — dostarczałyby uzasadnienia konkluzji. W wypadku wnioskowania kategorycznego mamy więc do czynienia z faktycznym roszczeniem do uzasadnienia, podczas gdy w wypadku wnioskowania hipotetycznego chodzi jedynie o uzasadnienie potencjalne. Wnioskowanie kategoryczne jest więc pełnokrwistym wnioskowaniem, a wnioskowanie hipotetyczne raczej wzorcem ewentualnego wnioskowania.

Celem wnioskowania kategorycznego jest faktyczne uzasadnienie konkluzji za pomocą przesłanek. Wnioskowanie może spełniać swoje zadanie z powodzeniem, może jednak zawodzić. Wnioskowanie, które spełnia z powodzeniem swoje zadanie, nazywa się *poprawnym* (*dobrym*), a wnioskowanie, które tego zadania nie spełnia, nazywa się *niepoprawnym* (*złym*). Żeby wnioskowanie osiągnęło swój cel, muszą zostać spełnione dwa warunki: po pierwsze, wszystkie przesłanki muszą być prawdziwe, po drugie, między przesłankami a wnioskiem musi zachodzić właściwy związek logiczny. Spełnienie pierwszego warunku nazywa się *materialną poprawnością*, a drugiego *konkluzywnością* wnioskowania. Braki w spełnianiu tych warunków są błędami wnioskowania. W wypadku wnioskowania hipotetycznego wymagamy wyłącznie konkluzywności, nie rościmy bowiem pretensji do prawdziwości przesłanek.

Poprawność materialna. Jeżeli wszystkie przesłanki wnioskowania są zdaniami prawdziwymi, to takie wnioskowanie jest *materialnie poprawne*. Natomiast *błąd materialny* polega na tym, że co najmniej jedna przesłanka jest zdaniem fałszywym, na przykład:

wszystkie zwierzęta wodne są rybami,
wszystkie ryby mają skrzela,
―――――――――――――――――
wszystkie zwierzęta wodne mają skrzela.

Jak wiadomo, m.in. walenie są zwierzątami wodnymi, nie będąc rybami. Nie są one też wyposażone w skrzela. Pierwsza przesłanka jest zdaniem fałszywym. Z tego powodu, mimo że konkluzywność nie budzi tu żadnych wątpliwości, wniosek okazuje się fałszywy. Jak widać, uzasadnienie, które jest oparte na zdaniu fałszywym, nie ma wartości.

Do błędu materialnego podobny jest nieco słabszy błąd *petitio principii*. Zarzucamy go wtedy, gdy co najmniej jedna przesłanka nie została należycie i uprzednio uzasadniona. Przez uzasadnienie uprzednie rozumiemy uzasadnienie niezależne od wniosku. Uzasadnienie może być natomiast należyte w jednym typie wiedzy, ale nie w innym. Na przykład uzasadnienie eksperymentalne może być uznane za należyte w fizyce, ale nie w matematyce.

O ile więc w wypadku błędu materialnego wiadomo, że któraś z przesłanek jest fałszem, o tyle w wypadku błędu *petitio principii* nie wiadomo, czy jest ona prawdą. Błąd *petitio principii* dlatego jest wadą mniejszą niż błąd materialny, że pozostawia otwartą kwestię naprawy wnioskowania przez poszukiwanie niezależnego uzasadnienia podważonej przesłanki. Nie mniej jednak jest to błąd stawiający materialną poprawność wnioskowania pod znakiem zapytania.

Szczególną postacią błędu *petitio principii* jest *błędne koło we wnioskowaniu*, zwane też błędem *circulus* (*vitiosus*) *in probando*. Błąd koła zarzucamy wnioskowaniu, jeśli uzasadnienie co najmniej jednej przesłanki jest zależne od konkluzji. Innymi słowy, konkluzja badanego wnioskowania występuje w roli przesłanki w pewnym innym wnioskowaniu, które prowadzi do uzasadnienia jakiejś przesłanki badanego wnioskowania. Następujący cytat wskazuje na trzy przykłady błędnego koła we wnioskowaniu. „Jeśli powiem: «średniowieczne dokumenty dowodzą zaistnienia pewnych cudów w takim samym stopniu, w jakim dowodzą zaistnienia pewnych bitew», słyszę w odpowiedzi: «w średniowieczu ludzie byli przesądni». Jeśli natomiast chcę wiedzieć, dlaczego moi przeciwnicy uważają ich za przesądnych, jedyną ostateczną odpowiedzią, jaką otrzymuję, jest to, że w średniowieczu ludzie wierzyli w cuda. Jeśli powiem: «pewien wieśniak widział ducha», mówią mi: «ależ wieśniacy są tak łatwowierni». A jeśli zapytam: «dlaczego łatwowierni?», odpowiedź brzmi: «ponieważ wierzą w duchy». Islandia nie może istnieć, ponieważ widzieli ją tylko głupi marynarze. Marynarze zaś są głupi tylko dlatego, że twierdzą, iż widzieli Islandię" (Gilbert Keith Chesterton, *Orthodoxy*).

Rozważania dotyczące błędu *petitio principii* pokazują przy okazji, dlaczego — jak powiedzieliśmy — tajemnicze uzasadnienie bezpośrednie musi odgrywać pewną rolę w każdym typie wiedzy. Po prostu nie ma możliwości uzasadniania wyłącznie za pomocą wnioskowań, które przecież przenoszą uzasadnienie z jednych zdań na inne. Aby jednak było co przenosić, muszą istnieć *ostateczne przesłanki*, uzasadnione bez odwoływania się do innych zdań. Dociekanie ostatecznych przesłanek stanowi zawsze ważną część analizy logicznej podstaw każdego typu wiedzy.

Badanie materialnej poprawności wnioskowania należy w zasadzie do tej gałęzi wiedzy, w której ramach wnioskowanie jest przeprowadzane. To, czy wszystkie zwierzęta wodne są rybami, nie jest problemem logiki, lecz biologii. Są jednak szczególne sytuacje, w których ocena materialnej poprawności może należeć również do logiki.

Mianowicie do logiki należy badanie, czy w przesłankach nie kryje się *sprzeczność*. Wnioskowaniu o sprzecznych przesłankach zarzucamy szczególną wersję błędu materialnego, zwaną błędem *sprzeczności* lub też błędem *przeczenia samemu sobie*. Przesłanki mogą być jawnie sprzeczne lub sprzeczność może być w nich ukryta. Wykrywanie sprzeczności oraz ich źródeł, a także zabezpieczanie się przed sprzecznością należy do głównych celów stosowania logiki.

Przez parę zdań sprzecznych rozumiemy takie dwa zdania, z których jedno przeczy dokładnie temu, co jest stwierdzane w drugim. Prostym przykładem pary zdań sprzecznych są zdania: „Kraków jest stolicą Polski", „Kraków nie jest stolicą Polski". Z pary zdań sprzecznych jedno musi być prawdziwe, a drugie fałszywe. Kryjący sprzeczność zbiór zdań musi z konieczności zawierać zdania fałszywe. Jeśli więc w przesłankach pewnego wnioskowania kryje się sprzeczność, to takie wnioskowanie nie może być materialnie poprawne: co najmniej jedna z przesłanek musi być fałszywa. Błąd sprzeczności w przesłankach jest więc szczególną, bardzo złośliwą postacią błędu materialnego. Sprzeczność dyskwalifikuje każdy zestaw przesłanek jako potencjalne źródło wiedzy. Kto przeczy samemu sobie, nie może niczego wartościowego stwierdzić ani uzasadnić.

Ogólne zagadnienie konkluzywności. Do centralnych zagadnień logiki należy problematyka konkluzywności wnioskowania. W sercu logiki leży mianowicie pytanie o związki, które mogą zachodzić między przesłankami a konkluzją wnioskowania, a które sprawiają, że przesłanki rzeczywiście nadają się na uzasadnienie konkluzji. Zauważmy, że konkluzywność nie zakłada materialnej poprawności. Można badać związki między przesłankami a konkluzją we wnioskowaniu o nieuzasadnionych, fałszywych, a nawet sprzecznych przesłankach. Konkluzywność rozumiemy wówczas w ten sposób, że przesłanki uzasadniają konkluzję potencjalnie, to znaczy, o ile są czy też o ile byłyby prawdziwe.

Związek logiczny między przesłankami a konkluzją jest dla wnioskowania istotny. Aby się o tym przekonać, rozważmy przykładowe wnioskowanie:

Warszawa jest stolicą Polski,
Madryt jest stolicą Hiszpanii,

Helsinki są stolicą Finlandii.

Wszystkie przesłanki i wniosek są doskonale prawdziwe. Mają też solidne uzasadnienie (można go uzasadnić, zerkając na polityczną mapę Europy). Mimo to rozważane wnioskowanie jest niepoprawne: brakuje związku logicznego między przesłankami a wnioskiem. W tym wnioskowaniu przesłanki nie stanowią zgoła żadnego obiektywnego uzasadnienia wniosku. Powiedzielibyśmy, że to wnioskowanie jest ewidentnie i całkowicie niekonkluzywne.

Jeżeli między przesłankami a konkluzją nie zachodzi żaden związek, który usprawiedliwiałby w jakimś stopniu przeniesienie uzasadnienia z przesłanek na konkluzję, to zarzucamy błąd *ignoratio elenchii*. Wnioskowanie przedstawione w poprzednim akapicie jest przykładem tego właśnie błędu.

Szczególną postacią błędu *ignoratio elenchii* jest błąd *quaternio terminorum*, zwany też błędem *wieloznaczności* we wnioskowaniu. Błąd ten zarzucamy, jeśli między przesłankami a wnioskiem nie zachodzi żaden wymagany związek logiczny, ale powstaje pozór takiego związku, wywołany użyciem jakiegoś zwrotu w co najmniej dwóch różnych znaczeniach. Błędem *quaternio terminorum* jest obarczone wnioskowanie:

każde małżeństwo jest umową społeczną,
niektóre małżeństwa mają dzieci,
---
niektóre umowy społeczne mają dzieci,

ponieważ, gdyby wieloznaczny wyraz „małżeństwo" miał w obu przesłankach to samo znaczenie, wnioskowanie byłoby konkluzywne, ale wnioskującemu najwidoczniej chodzi o różne znaczenia tego wyrazu. Wystarczy jednak odpowiednio doprecyzować znaczenie używanych we wnioskowaniu zwrotów:

każdy akt zawarcia małżeństwa jest umową społeczną,
niektóre pary małżeńskie mają dzieci,
___
niektóre umowy społeczne mają dzieci,

by pozory konkluzywności prysły, by okazało się, że rozpatrywane wnioskowanie jest ewidentnie niekonkluzywne.

Dedukcja a spekulacja. Konkluzywności oczekujemy od każdego, bez wyjątku, wnioskowania. Jak bowiem powiedzieliśmy, roszczenie do możliwości uzasadnienia konkluzji za pomocą przesłanek stanowi istotę wnioskowania. Jednakże różnym rodzajom wnioskowania odpowiadają różne rodzaje konkluzywności. Najważniejszy pod tym względem jest podział wnioskowań na

- niezawodne (dedukcyjne),
- zawodne (spekulatywne).

Wnioskowanie dedukcyjne może też być nazywane krótko *dedukcją*, a wnioskowanie spekulatywne *spekulacją*. Wnioskowania niezawodne różnią się od wnioskowań zawodnych relacją, która łączy przesłanki z konkluzją. Aby sobie tę różnicę uzmysłowić, odwołamy się do prostego przykładu.

Wyobraźmy sobie podróżnego, który wybiera się koleją z Wrocławia do Lublina. Powiedzmy, że nasz podróżny ma na imię Pankracy. Ponieważ Pankracy zaspał, wbiega na peron w ostatniej chwili. Oczekują tu dwa składy: a i b. Pakracy przeprowadza wnioskowanie:

do Lublina jest daleko,
na długich trasach kursują zwykle lepsze składy,
skład a jest znacznie nowszy i czystszy niż skład b,
___
do Lublina jedzie skład a.

Opierając się na tym wnioskowaniu Pankracy biegnie w kierunku składu a. Wchodząc do wagonu, spotyka konduktora. Zagadnąwszy go, dla pewności, o cel podróży, dowiaduje się, że ten skład jedzie do Poznania. Wówczas Pakracy, ostatkiem sił galopując na drugą stronę peronu, wnioskuje odruchowo:

do Lublina jedzie skład a lub skład b,
skład a nie jedzie do Lubline,
___
do Lublina jedzie skład b.

Obydwa wnioskowania, na których opiera się Pankracy, są poprawne, ale różnią się od siebie pod bardzo istotnym względem. Pierwsze wnioskowanie jest zawodne, a drugie niezawodne. Niezawodność drugiego wnioskowania polega na tym, że jest bezwzględnie niemożliwe, żeby wszystkie przesłanki były prawdą, a konkluzja fałszem. Ewentualna prawdziwość przesłanek daje więc gwarancję prawdziwości wniosku. Rzeczywiście, gdyby się okazało, że skład b nie jedzie do Lublina, któraś z przesłanek musiałaby być fałszywa. Bądź napotkany konduktor wprowadził Pankracego w błąd, bądź Pankracy pomylił w pośpiechu perony i żaden z wchodzących w grę składów nie jechał do Lublina. Inaczej jest w wypadku pierwszego, zawodnego, wnioskowania. Choć przesłanki dostarczają konkluzji rzetelnego uzasadnienia, nie da się wykluczyć, że konkluzja jest fałszywa mimo prawdziwości wszystkich przesłanek. Sam Pakracy wyczuł to, skoro indagował napotkanego pracownika kolei.

W wypadku wnioskowania zawodnego można sobie zawsze wyobrazić rozwój wiedzy, napływ nowych informacji, nowych przesłanek, które zmuszą do wycofania się z uznania konkluzji, mimo że pierwotne przesłanki nadal będą uważane za prawdziwe. Gdyby Pakracy wiedział się, że pociągo do Poznania odjeżdża z tego samego peronu, co pociąg od Lublina, nie byłby raczej skłonny wnioskować:

do Lublina jest daleko,
do Poznania też jest daleko,
na długich trasach kursują zwykle lepsze składy,
do bogatych miast kursują lepsze składy niż do miast biednych,
skład a jest znacznie nowszy i czystszy niż skład b,
___
do Lublina jedzie skład a.

Zauważmy, że wszystkie wcześniej zaakceptowane przesłanki pozostały w mocy, ale nowe informacje odwodzą od wysnucia tego samego, co poprzednio, wniosku. Taki bieg wypadków jest wykluczony w odniesieniu do wnioskowań niezawodnych (dedukcyjnych). Żadne nowe przesłanki nie mogą tutaj uchylić wniosku, dopóki pierwotne przesłanki pozostają w mocy. Jedyną drogą ewentuanego obalenia konkluzji wnioskowania niezawodnego jest obalenie którejś z przesłanek. Tę własność dedukcji nazywamy *monotonicznością*. Wnioskowanie jest monotoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy żadne dodatkowe przesłanki nie mogą przekształcić wnioskowania konkluzywnego w niekonkluzywne. Monotoniczne są wszystkie wnioskowania dedukcyjne i tylko one.

Przyjrzyjmy się jeszcze przykładowym wnioskowaniom, które odegrały ważną rolę w nauce, chociaż są zawodne i — jak się z czasem okazało — mimo prawdziwości wszystkich przesłanek prowadzą do błędnego wniosku. Przez stulecia za uzasadnione na gruncie biologii uznawano twierdzenie, że biel jest cechą gatunkową łabędzi. To twierdzenie zostało wywnioskowane z ogromnej liczby zdań stwierdzających, że wszystkie zaobserwowane w różnych okolicznościach łabędzie są białe. Było to bardzo solidne wnioskowanie.

Tymczasem, pod koniec XVIII w. w zachodniej Australii odkryto czarne łabędzie. Ponieważ są one są endemicznymi ptakami lęgowymi Australii, która przez wieki była izolowana od reszty świata, nie spotkano ich wcześniej. Analogicznie, na podstawie niewyobrażalnie wielkiej liczby obserwacji wnioskowano przez wieki na gruncie fizyki, że masa ciała nie zależy od prędkości, z jaką to ciało się porusza. Wnioskowania te były całkiem konkluzywne. Kiedy wszakże nauczono się mierzyć prędkości bliskie prędkości światła, wniosek okazał się fałszywy mimo prawdziwości przesłanek i wielkiej solidności przeprowadzonych wnioskowań. Takie właśnie wnioskowania określamy jako spekulacje.

Jak widać, uzasadnienie, jakiego można dostarczyć za pomocą wnioskowania zawodnego, jest zawsze tymczasowe, zawsze jest obarczone pewnym ryzykiem. Mimo to wnioskowania zawodne nie są w żadnym sensie błędne ani nawet mało wartościowe. Przeciwnie, rozwój wiedzy nie byłby bez nich możliwy. We wnioskowaniach zawodnych zawsze występuje jakiś *przeskok* z przesłanek do wniosku. Ten przeskok przybiera postać jakiegoś *domysłu*, *spekulacji* (stąd alternatywna nazwa wnioskowań zawodnych). Dzięki temu przeskokowi, wnioskowania zawodne wprowadzają do wiedzy moment wolnej twórczości, przyczyniając się walnie do poznawczego postępu. Natomiast informacja zawarta w konkluzji wnioskowania dedukcyjnego jest w pewnym sensie *implicite* zawarta już w przesłankach.

Wynikanie logiczne. Związek, który łączy przesłanki z konkluzją we wnioskowaniach niezawodnych (dedukcyjnych), nazywa się *wynikaniem logicznym*. Mówimy, że w niezawodnych wnioskowaniach wniosek *wynika logicznie* z przesłanek. Pojęcie wynikania, obok pojęcia sprzeczności, należy do najważniejszych pojęć logiki. Przesłanki wnioskowania dedukcyjnego nazywamy często *racją* wniosku, a wniosek *następstwem* przesłanek. Związek wynikania logicznego jest więc czasem nazywany związkiem racji i następstwa. Wynikanie logiczne jest też nazywane *wyprowadzalnością* lub *konsekwencją logiczną*. Zamiast mówić, że zdanie $\mathcal{A}$ wynika logicznie ze zbioru zdań X, mówimy więc nieraz, że zdanie $\mathcal{A}$ jest wyprowadzalne ze zbioru X lub że jest konsekwencją (logiczną) zbioru X, zapisując to skrótowo:

$$X \vdash \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

W przeciwnym razie piszemy: $X \nvdash \mathcal{A}$. Zbiór wszystkich konsekwencji zbioru X określamy jako $C(X)$. Wobec tego, zamiast zapisu (1.1), można równoważnie pisać:

$$\mathcal{A} \in C(X) \tag{1.2}$$

i odpowiednio $\mathcal{A} \notin C(X)$. Pojęcie wynikania logicznego (tj. konsekwencji, wyprowadzalności) leży w samym sercu logiki i niemal wszystkie dociekania logiczne odwołują się do tego pojęcia. Wielu badaczy głosi nawet, że logika jest po prostu nauką o wynikaniu.

Od wnioskowania dedukcyjnego oczekujemy zatem nie tylko tego, by było ono w ogóle konkluzywne, ale tego, by było konkluzywne we właściwy sobie sposób. Mówimy wówczas, że wniosek wynika z przesłanek lub że jest ich następstwem. O wnioskowaniach konkluzywnych w ten szczególny sposób, to znaczy, o wnioskowaniach, których wniosek wynika logicznie z przesłanek, mówimy, że są są *konkluzywne dedukcyjnie*, *formalnie poprawne* lub że są *logiczne*. Z wynikaniem logicznym wiążą się dwa podstawowe błędy logiczne:

- błąd formalny, zwany też błędem *non sequitur*,
- błąd niekonsekwencji.

Najkrócej mówiąc, błąd formalny polega na dopatrywaniu się związku wynikania logicznego tam, gdzie go nie ma, a błąd niekonsekwencji polega na nierespektowaniu zachodzącego związku wynikania logicznego. Innymi słowy błąd formalny polega na uznaniu za dedukcyjne wnioskowania, w którym konkluzja nie wynika logicznie z przesłanek. Błąd niekonsekwencji polega natomiast na uznaniu za prawdę wszystkich przesłanek wnioskowania dedukcyjnego i jednoczesnej odmowie uznania za prawdę konkluzji tego wnioskowania. Podkreślmy, że nie jest jeszcze niekonsekwencją sam brak uznania za prawdę jakiegoś następstwa zdań, które się za prawdę uznało. Z dowolnych zdań wynika bowiem logicznie nieskończenie wiele różnych następstw i żaden umysł ludzki nie może sobie ich wszystkich nawet uświadamiać, nie mówiąc już o rozpoznaniu. Błąd niekonsekwencji popełnia dopiero ten, kto pozytywnym aktem swego umysłu odmawia uznania za prawdę jakiegoś nastęsptwa uznawanych przez siebie za prawdziwe zdań. Błąd formalny i błąd niekonsekwencji są dwiema najbardziej podstawowymi postaciami nielogiczności.

Wynikanie a prawdziwość. Jeśli między przesłankami a konkluzją jakiegoś wnioskowania zachodzi związek wynikania logicznego, to prawdziwość wniosku jest z koniecznością pociągana przez prawdziwość przesłanek. Samo wynikanie nie gwarantuje jednak prawdziwości przesłanek, czyli materialnej poprawności wnioskowania. Jest ono bowiem jedynie związkiem zachodzącym między przesłankami a wnioskiem i gwarantuje transmisję prawdziwości z przesłanek do wniosku — wszakże pod tym warunkiem, że wszystkie przesłanki są prawdziwe. Zatem wynikanie logiczne wyklucza dokładnie jedną możliwość, mianowicie tę, że wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek jest mimo to fałszywy. Stwierdzając zajście wynikania logicznego, możemy być pewni, że zachodzi jedna z trzech pozostałych możliwości:

- wszystkie przesłanki są prawdziwe i wniosek jest prawdziwy,
- co najmniej jedna przesłanka jest fałszywa, ale wniosek jest mimo to prawdziwy,
- co najmniej jedna przesłanka jest fałszywa i wniosek też jest fałszywy.

Samo wynikanie logiczne nie daje nam żadnych podstaw do rozstrzygnięcia, która z tych trzech dopuszczonych możliwości zachodzi.

Rozpatrzmy przykłady kilku dedukcyjnych, formalnie poprawnych wnioskowań, w których wniosek wynika logicznie z przesłanek, a które egzemplifikują trzy wskazane możliwości. We wnioskowaniu:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{wszyscy królowie Polski byli ochrzczeni,}\\ \text{Bolesław Śmiały był królem Polski,}\end{array}}{\text{Bolesław Śmiały był ochrzczony,}}$$

obie przesłanki i konkluzja są prawdziwe. Jest to zarazem wnioskowanie dedukcyjne czyli konkluzja wynika logicznie z przesłanek. Zatem prawdziwość konkluzji jest zagwarantowana przez prawdziwość przesłanek (poprawność materialna) i związek wynikania logicznego (poprawność formalna). Natomiast we wnioskowaniu:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{wszyscy królowie Polski byli mężczyznami,}\\ \text{Bolesław Śmiały był królem Polski,}\end{array}}{\text{Bolesław Śmiały był mężczyzną,}}$$

konkluzja jest akurat prawdziwa i wynika logicznie z przesłanek, ale pierwsza przesłanka jest fałszywa. Wśród królów Polski były dwie kobiety: św. Jadwiga Andegaweńska i Anna Jagiellonka. Konkluzja zatem jest prawdziwa tylko przypadkiem, samo wnioskowanie tego nie gwarantuje mimo formalnej poprawności. Zaznaczmy, że konkluzja może być akurat prawdziwa nawet, gdy wszystkie przesłanki są fałszywe:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{wszyscy królowie Polski byli mężczyznami,}\\ \text{Henryk VIII Tudor był królem Polski,}\end{array}}{\text{Henryk VIII Tudor był mężczyzną.}}$$

Konkluzja może być więc w takich razach prawdziwa, natomiast wnioskowanie nie daje żadnej gwarancji prawdziwości konluzji, nie dostarcza jej żadnego uzasadnienia. Gdybyśmy bowiem mieli mniej szczęścia, przy co najmniej jednej przesłance fałszywej konkluzja mogłaby okazać się również fałszywa, jak w kolejnym przykładzie:

wszyscy królowie Polski byli mężczyznami,
św. Jadwiga była królem Polski,
———————————————
św. Jadwiga była mężczyzną.

Tutaj konkluzja jest fałszywa. Mimo to wnioskowanie jest formalnie poprawne, to znaczy wniosek wynika logicznie z przesłanek. Jednak to, że jedna z przesłanek jest fałszywa, pozbawia całe wnioskowanie gwarancji zakończenia się konkluzją prawdziwą.

Już wcześniej pokazaliśmy, że nie każde wnioskowanie o prawdziwych przesłankach i prawdziwej konkluzji jest dedukcyjne. Teraz pokazaliśmy, że z drugiej strony fałsz przesłanek lub wniosku nie wyklucza dedukcyjności. Zatem prawdziwość przesłanek i wniosku nie ma bezpośredniego przełożenia na zachodzenie związku wynikania logicznego. Wykluczona — i to całkiem bezwzględnie — jest tylko ta jedna możliwość, że wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek jest fałszywy. Zachodzą więc następujące zależności między wartościami logicznymi przesłanek i konkluzji wnioskowań dedukcyjnych:

- jeżeli wszystkie przesłanki są prawdziwe, to tym samym również wniosek jest prawdziwy,
- jeżeli co najmniej jedna przesłanka nie jest prawdziwa, to nic stąd nie wiadomo o wartości logicznej wniosku,
- jeżeli wniosek jest fałszywy, to tym samym co najmniej jedna przesłanka również musi być fałszywa,
- jeżeli wniosek jest prawdziwy, to nic stąd nie wiadomo o wartościach logicznych przesłanek.

Sformułowane zależności biorą się stąd, że z prawdziwych zdań wynikają tylko zdania prawdziwe, natomiast ze zdań fałszywych — jak pokazaliśmy — mogą wynikać zarówno prawdziwe, jak i fałszywe zdania.

Entymemat. W praktyce nie zawsze wymieniamy wyraźnie wszystkie przesłanki wnioskowania. Przeciwnie, zazwyczaj pomijamy niektóre z nich milczeniem, przyjmując je domyślnie. Jeżeli we wnioskowaniu dedukcyjnym niektóre przesłanki zostają przemilczane, to poestaje wnioskowanie *entymematyczne* lub krócej *entymemat* ze względu na te pominięte przesłanki. Związek przesłanek z wnioskiem w takim wnioskowaniu nazywamy *wynikaniem entymematycznym* ze względu na owe pominięte przesłanki. Na przykład wnioskowanie:

$$\frac{\text{Wenus jest planetą,}}{\text{we wnętrzu Wenus nie trwają reakcje termojądrowe,}}$$

nie robi wrażenia dedukcji. Domyślamy się jednak dodatkowej przesłanki, którą ujmujemy w kwadratowy nawias:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{[we wnętrzu żadnej planety nie trwają reakcje termojądrowe,]}\\ \text{Wenus jest planetą,}\end{array}}{\text{we wnętrzu Wenus nie trwają reakcje termojądrowe.}}$$

Po wypowiedzeniu dodatkowej przesłanki przekonujemy się, że wnioskowanie jest w gruncie rzeczy dedukcyjne, mimo że na pierwszy rzut oka nie robiło takiego wrażenia. Przesłanki, których trzeba się domyślić, nazywają się *cichymi przesłankami*, a niekiedy, zwłaszcza gdy nie były przyjmowane świadomie, *ukrytymi przesłankami* lub *ukrytymi założeniami*. Mogą one być akceptowane przez wnioskującego mniej lub bardziej świadomie. Często nieświadomie. Należy odróżniać wnioskowanie entymematyczne od wnioskowania obarczonego błędem *non sequitur*. Wymaga to jednak nieraz dociekania intencji wnioskującego.

Wynikanie entymematyczne ma tę samą naturę co pełnokrwiste wynikanie logiczne. W gruncie rzeczy jest to wynikanie logiczne zrelatywizowane do pewnej pozalogicznej wiedzy. Dlatego entymematy należy uznawać za osobliwe wnioskowania dedukcyjne. Analogicznie do wynikania logicznego mówimy o konsekwencji lub wyprowadzalności *na grucie* pewnego zbioru zdań lub *ze względu* na ten zbiór zdań.

Wnioskowanie zawodne (spekulacja). Ilekroć konkluzja nie wynika z przesłanek, tylekroć mamy do czynienia z wnioskowaniem *zawodnym* (*spekulatywnym*). Jak widzieliśmy, wnioskowania zawodne mogą być mimo wszystko konkluzywne, to znaczy, przesłanki tych wnioskowań mogą dostarczać konkluzjom pewnego uzasadnienia. Uzasadnienie to może być nawet mocne, aczkolwiek nigdy nie osiąga mocy dedukcji — zawsze jest tymczasowe, nigdy nie jest ostateczne. Wnioskowania zawodne wprowadzają do wiedzy moment twórczości, dlatego są istotne dla poznawczego postępu. Twórczość we wnioskowaniach zawodnych polega na tym, że zawsze zawierają one moment *domysłu* czyli *spekulacji*. Konkluzja wnioskowania spekulatywnego bywa nazywana *domysłem* lub *przypuszczeniem* opartym na przesłankach. Ocena konkluzywności spekulacji jest problemem znacznie bardziej skomplikowanym niż ocena konkluzywności dedukcji. Przede wszystkim w wypadku dedukcji możemy orzec po prostu, że wniosek wynika lub że nie wynika z przesłanek. Natomiast konkluzywność wnioskowania spekulatywnego jest stopniowalna:

jesteśmy często zmuszeni dyskutować stopień czy też siłę uzasadnienia dostarczonego wnioskowi przez przesłanki. Nie zawsze przy tym łatwo przychodzi odróżnianie słabej — ale mimo wszystko wartościowej — spekulacji od wnioskowania obarczonego błędem *ignoratio elenchii*. Okazuje się, że kluczową rolę w ocenie wnioskowań spekulatywnych odgrywa znów związek wynikania, choć występuje on w znacznie bardziej skomplikowanej konstelacji niż w wypadku dedukcji.

Pojęcie indukcji. Najważniejszą i najbardziej podstawową postacią spekulacji jest wnioskowanie *indukcyjne*, zwane też krótko *indukcją*. Podstawowe znaczenie indukcji bierze się stąd, że właściwie wszystkie konkluzywne wnioskowania spekulatywne dają się sprowadzić do mniej lub bardziej skomplikowanych powiązań indukcji z dedukcją. Konkluzja wnioskowania indukcyjnego jest często nazywana *hipotezą* lub *uogólnieniem* indukcyjnym. Ponieważ indukcja jest szczególną postacią spekulacji, hipoteza jest szczególną postacią domysłu.

Wnioskowanie zawodne określamy jako indukcyjne ze względu na zbiór zdań X wtedy i tylko wtedy, gdy każda z przesłanek tego wnioskowania wynika z jego konkluzji i ewentualnie pewnych zdań należących do zbioru X. Zbiór X nazywa się *tłem* indukcji i zawiera wyjściową wiedzę lub założenia, na których opiera się indukcja. Zamiast o indukcji ze względu na zbiór X można też mówić o indukcji *na tle* zbioru X. W najprostszych przypadkach tło X indukcji jest zbiorem pustym. Wówczas każda przesłanka wynika logicznie z samej konkluzji. Mamy wówczas do czynienia z *indukcją enumeracyjną*, której przykładem jest wnioskowanie:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{przedmiot } a_1\text{, zsunięty ze stołu, spada,}\\ \text{przedmiot } a_2\text{, zsunięty ze stołu, spada,}\\ \text{przedmiot } a_3\text{, zsunięty ze stołu, spada,}\end{array}}{\text{każdy przedmiot, zsunięty ze stołu, spada.}}$$

Widać, że konkluzja nie wynika logicznie z przesłanek, ale każda z przesłanek ewidentnie wynika logicznie z konkluzji. Nietrywialne, naukotwórcze przypadki indukcji rzadko mają charakter enumeracyjny. Zwykle wymagają niepustego tła, którego rolę często odgrywa zbiór twierdzeń jakiejś teorii. Przykładem indukcji ze względu na wiedzę o zachowaniu fal jest wnioskowanie:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{światło odbija się,}\\ \text{światło podlega refrakcji,}\\ \text{światło podlega interferencji,}\end{array}}{\text{światło jest falą.}} \tag{1.3}$$

Jest to wnioskowanie zawodne, a więc wniosek nie jest następstwem przesłanek, lecz opartym na nich domysłem. Światło może bowiem nie być falą, lecz jedynie w pewnych okolicznościach zachowywać się jak fala — jak zresztą naucza obecnie fizyka. Z drugiej strony każda z przesłanek wynika z konkluzji i z pewnych znanych zdań opisujących zachowanie fal:

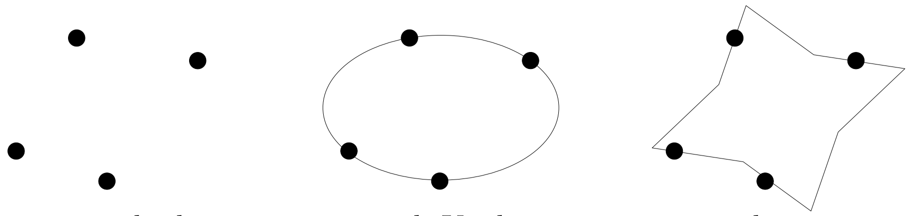
$$
\begin{array}{l}
\text{każda fala podlega odbiciom,} \\
\text{światło jest falą,} \\
\hline
\text{światło podlega odbiciom,} \\[1ex]
\text{każda fala podlega refrakcji,} \\
\text{światło jest falą,} \\
\hline
\text{światło podlega refrakcji,} \\[1ex]
\text{każda fala podlega interferencji,} \\
\text{światło jest falą,} \\
\hline
\text{światło podlega interferencji.}
\end{array}
\tag{1.4}
$$

W każdym z wnioskowań dedukcyjnych (1.4) pierwsza przesłanka należy do tła indukcji (1.3), druga przesłanka jest konkluzją tej indukcji, a wniosek jest jedną z przesłanek indukcji (1.3). Zatem wnioskowanie zawodne (1.3) jest faktycznie indukcją na tle zdań stwierdzających, że każda fala podlega odbiciom, interferencji i refrakcji. Tło wnioskowania indukcyjnego nazywamy też tłem hipotezy, która stanowi konkluzję tego wnioskowania.

Prostym, a zarazem wielce pouczającym, przykładem indukcji jest sformułowanie przez Johannesa Keplera prawa elips. Zgodnie z tym prawem planety poruszają się po torach mających kształt elips ze Słońcem w jednym z ognisk. Kepler dysponował — w charakterze przesłanek — obserwacjami położenia planet w różnym czasie. Wnioskował więc indukcyjnie:

$$
\begin{array}{l}
\text{w czasie } t_1 \text{ planeta } a \text{ jest obserwowana w miejscu } l_1, \\
\text{w czasie } t_2 \text{ planeta } a \text{ jest obserwowana w miejscu } l_2, \\
\ldots, \\
\text{w czasie } t_n \text{ planeta } a \text{ jest obserwowana w miejscu } l_n, \\
\hline
\text{planeta } a \text{ porusza się po elipsie } e
\end{array}
$$

na tle geometrii figur płaskich oraz pewnych tez astronomicznych. Niezależnie od liczby poczynionych obserwacji, nie mamy tu nigdy do czynienia z dedukcją. Te same przesłanki mogłyby bowiem pozostać prawdziwe przy innej zasadzie ruchu planet — na przykład tej, którą proponował system Ptolemeusza — a nawet wtedy, gdyby ruchem planet rządził czysty przypadek. Jednakże każda z obserwacyjnych przesłanek wynika z konkluzji i pewnych zdań tła indukcji, jak to pokazano na tablicy 1.1.



przesłanki wniosek Keplera inna hipoteza

Tablica 1.1: Keplera prawo elips

Odnośnie do materialnej poprawności wnioskowań indukcyjnych należy stwierdzić jedynie, że zdania stanowiące tło indukcji podlegają tej ocenie na równi z przesłankami. W grucie rzeczy zdania w tle indukcji są pełnoprawnymi przesłankami, a specjalną nazwę wprowadzamy dla nich tylko z tego powodu, aby poręczniej mówić o związkach wynikania we wnoskowaniu indukcyjnym. Natomiast zagadnienie konkluzywności indukcji jest znacznie bardziej złożone.

Sprawdzanie (testowanie) hipotez. Sprawdzenie hipotezy, odnośnie do której nie wiemy, czy jest prawdą, czy fałszem, jest to wnioskowanie dedukcyjne, w którym ta hipoteza odgrywa rolę przesłanki, którego pozostałe przesłanki należą do tła tej hipotezy i które ma konkluzję o znanej wartości logicznej. Jeżeli wiadomo, że konkluzja jest prawdziwa, to mamy do czynienia ze *sprawdzeniem pozytywnym* czyli *weryfikacją*, a jeżeli konkluzja jest negatywna, to mamy do czynienia ze *sprawdzeniem negatywnym* czyli *falsyfikacją*. Przykładem weryfikacji hipotezy o falowej naturze światła są wnioskowania (1.4), a wnioskowanie:

$$\begin{array}{l}\text{żadna fala nie wywiera ciśnienia,}\\ \underline{\text{światło jest falą,}\qquad\qquad\qquad\quad}\\ \text{światło nie wywiera ciśnienia}\end{array} \tag{1.5}$$

jest przykładem falsyfikacji. Jak bowiem uzasadnił teoretycznie J. C. Maxwell w 1871 r., a w 1900 i 1907 r. eksperymentalnie potwierdził P. N. Lebiediew, światło wywiera ciśnienie.

Wiemy już, że ze zdań prawdziwych wynikają wyłącznie zdania prawdziwe. Falsyfikacja zmusza zatem do uznania sprawdzanej hipotezy za fałsz. Jeśliby jednak się okazało, że fałszywe jest jakieś zdanie zawarte w tle, to hipoteza mogłaby przetrwać. Zdarza się to raczej rzadko. Zdania występujące w tle są zwykle traktowane jako z pewnością prawdziwe. Własności wynikania zmuszają więc w praktyce do uznania sfalsyfikowanej hipotezy za fałsz.

Wiemy również, że zdanie prawdziwe może wynikać zarówno ze zdań prawdziwych, jak z fałszywych. Jeśli więc sprawdzenie jest pozytywne, to zweryfikowana hipoteza może być zarówno prawdziwa, jak fałszywa. Takie wnioskowania, jak (1.4), nie dają zatem wiedzy o wartości logicznej sprawdzanej hipotezy. Mimo to uznajemy, że dostarczają one tej hipotezie pewnego uzasadnienia. Opieramy się tu na następującym założeniu. Jak wiadomo, wnioskowania dedukcyjne, które mają co najmniej jedną fałszywą przesłankę, mogą mieć zarówno prawdziwy, jak fałszywy wniosek. Jeśli więc będziemy dedukcyjnie wysnuwać z fałszywej przesłanki dostatecznie dużo różnych wniosków, to *najprawdopodobniej* w końcu trafimy na ten wniosek fałszywy. Dopóki zatem nie są nam znane fałszywe następstwa sprawdzanej hipotezy i zdań należących do jej tła, dopóty *tymczasowo* wolno nam uznawać tę hipotezę za prawdziwą. Tymczasowe uznanie hipotezy za prawdziwą wiąże się z powinnością dalszego sprawdzania, zatem wnioskowanie indukcyjne jest zawsze otwarte na poszukiwanie nowych, dodatkowych przesłanek — na dalsze sprawdzanie sformułowanej hipotezy.

Konkluzywność wnioskowania indukcyjnego. Widać, że wnioskowanie indukcyjne jest, pod pewnym względem, zespołem powiązanych wnioskowań dedukcyjnych. Konkluzywność wnioskowania indukcyjnego zależy od tego zespołu sprawdzeń, ale również od wyjściowego statusu przesłanek i wniosku. Stopień uzasadnienia konkluzji wnioskowania indukcyjnego jest tym wyższy,

(a) im większa jest liczba jego weryfikacji,

(b) im bardziej zróżnicowane są jego weryfikacje,

(c) im bardziej niespodziewane są konkluzje weryfikacji,

(d) im mniej niespodziewana jest sama weryfikowana hipoteza.

Dwa pierwsze warunki opierają się na poczynionych uwagach o naturze weryfikacji. Dwa ostatnie warunki opierają się na przekonaniu, że bardziej niespodziewaną hipotezą trudniej jest uzasadnić i że spełnienie bardziej niewiarygodnego przewidywania jest mocniejszym uzasadnieniem.

Widać, że — jak już powiedziano — konkluzywność wnioskowania indukcyjnego jest stopniowalna. Nie możemy więc mówić — jak w odniesieniu do wnioskowań dedukcyjnych — po prostu o wnioskowaniach formalnie poprawnych lub niepoprawnych. Mówimy raczej o wnioskowaniach *mocniejszych* lub *słabszych* indukcyjnie. Siła indukcji leży zawsze pomiędzy błędem *ignoratio elenchii* a niezawodnością dedukcji.

Przekonaliśmy się, że dla oceny wartości uzasadnienia kluczowe znaczenie ma umiejętność rozpoznawania związku wynikania logicznego, a także takich spokrewnionych z nim związków, jak sprzeczność. Wbrew pozorom nie jest to zadanie łatwe. Zadaniem tym logicy parają się właściwie przez całą historię swej dyscypliny.

Problematyczność wynikania. Niekiedy jest oczywiste to, że konkluzja pewnego wnioskowania wynika logicznie z przesłanek, lub to, że ona z nich nie wynika. Przyjrzyjmy się przykładowo wnioskowaniom:

wszystkie ssaki są kręgowcami,
wszystkie kręgowce są strunowcami,
———
wszystkie ssaki są strunowcami,

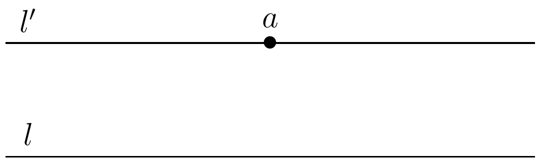
Warszawa jest stolicą Polski,
Madryt jest stolicą Hiszpanii,
———
Helsinki są stolicą Finlandii.

Gołym okiem widać, że w pierwszym wypadku wniosek wynika z przesłanek, a w wypadku drugim nie. Z drugiej strony można wskazać wiele wnioskowań, w których ocena dedukcyjności nie jest, żadną miarą, oczywista. Powstaje wówczas problem oceny tego, czy wynikanie zachodzi, czy nie. Przyjrzyjmy się dwóm przykładom.

Piąty Postulat Euklidesa. Trudnego do przecenienia przykładu doniosłości badań logicznych dostarcza historia matematyki. Chodzi tutaj perypetie *piątego postulatu* Euklidesa, który ok. 300 r. przed Chrystusem ogłosił dzieło pt. *Elementy*. W 13 księgach wyłożył tam teorię matematyczną w taki sposób, że wielka liczba twierdzeń została udowodniona na podstawie stosunkowo małej liczby założeń, w szczególności 45 założeń wyraźnie sformułowanych i pewnej liczby założeń wykorzystywanych nieświadomie. Pięć kluczowych założeń nazwano postulatami. Stanowią one, że

- między dowolnymi dwoma punktami można przeprowadzić prostą,
- prostą ograniczoną można przedłużać nieskończenie,
- z dowolnego środka można zatoczyć okrąg o dowolnym promieniu,
- wszystkie kąty proste są sobie równe,
- dla dowolnej prostej l i dowolnego punktu a, nieleżącego na prostej l, istnieje jedna i tylko jedna prosta l', która jest równoległa do prostej l i przechodzi przez punkt a.

Piąty z przytoczonych postulatów oryginalnie brzmiał: jeżli dwie proste przy przecięciu z trzecią tworzą po jednej stronie kąty wewnętrzne, jednostronne, których suma jest mniejsza od 180°, to te proste przecinają się przy dostatecznym przedłużeniu, i to po tej właśnie stronie. Obydwa sformułowania są równoważne. Współcześnie zwykle wybieramy prostszą i bardziej klarowną wersję. Treść Piątego Postulatu została zilustrowana na tablicy 1.2.



Tablica 1.2: Piąty postulat Euklidesa

Wszystkie założenia Euklidesa były przez stulecia uważane za oczywiste. Jeszcze w XIX w. *Elementy* były powszechnie używane jako szkolny podręcznik geometrii. Od samego początku jednak uczeni czuli się zaniepokojeni piątym, najbardziej skomplikowanym postulatem. Nie niepokojono się jednak tym, czy ten postulat jest prawdziwy, ale tym, czy jest potrzebny. Dość powszechnie sądzono, że wynika on z pozostałych, że można go udowodnić za pomocą pozostałych założeń. Współczesny logik powiedziałby, że odmawiano temu postulatowi *niezależności* od pozostałych założeń. Matematycy usiłowali więc na różne sposoby udowodnić piąty postulat w oparciu o pozostałe założenia Euklidesa. Próby takie podejmowali już Ptolemeusz i Proklos, a później John Wallis, Girolamo Saccheri, Adrien-Marie Legandre i wielu innych. Wszyscy oni sądzili, że udało im się udowodnić piąty postulat, to znaczy, wykazać, że wynika on logicznie z pozostałych założeń Euklidesa. Zawsze jednak okazywało się, że to wynikanie nie zachodzi. Choć matematycy sądzili, że wnioskują w sposób dedukcyjny, w rzeczywistości ich wnioskowania zawsze były dotknięte błędem *non sequitur*. Jak pamiętamy, polega on na braku wynikania logicznego we wnioskowaniu zdeklarowanym jako dedukcyjne. W XIX w., głównie dzięki wysiłkom takich badaczy, jak János Bolyai, Nikołaj Iwanowicz Łobaczewski i Carl Friedrich Gauss, okazało się, że piąty postulat nie wynika z pozostałych założeń, a więc jest niezbędny w geometrii Euklidesa. Zastępując ten postulat innymi, zbudowano szereg niesprzecznych teorii matematycznych, zwanych *geometriami nieeuklidesowymi*. Tymczasem zaledwie kilka lat przed powstaniem pierwszej geometrii nieeuklidesowej wybitny uczony niemiecki, Immanuel Kant, znawca m.in. matematyki i fizyki, ogłosił, że jakakolwiek geometria różna od geometrii Euklidesa jest absolutnie niemożliwa i nigdy nie będzie mogła powstać. Jak wielcy matematycy, którzy usiłowali dowieść piątego postulatu, widzieli wynikanie tam, gdzie go nie było, tak Kant mylnie dopatrzył się sprzeczności w odrzuceniu piątego postulatu (tę nieistniejącą sprzeczność dostrzegał też m.in. wybitny matematyk Saccheri). Dociekania nad piątym postulatem przyczyniły się też w poważny sposób do rozwoju logiki, ponieważ wymagały ścisłego namysłu nad takimi pojęciami, jak wynikanie, niesprzeczność i niezależność. Te dociekania nauczyły nas, że badanie związków logicznych nie ma w sobie nic z banalności. Dzieje Piątego Postulatu stanowią ważny przykład pozornego wynikania, którego nie zachodzi, choć niemal wszystkim zdaje się, że je dostrzegają.

Dowód praw Keplera. Drugi przykład pokazuje ważne wynikanie, którego gołym okiem w ogóle nie widać. Chodzi o dowód praw Keplera na gruncie mechaniki Newtona i szkolnej geometrii. Na początku XVII w., opierając się na obserwacjach Tychona de Brahe, Johannes Kepler sformułował trzy hipotezy. Stwierdził, że orbity planet mają kształt elips, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk każdej z tych elips. O tym Pierwszym Prawie Keplera już wspominaliśmy na s. 19. Ponadto stwierdził, że planeta porusza się szybciej, kiedy znajduje się w bliższej Słońcu części swej orbity, i wolniej, gdy znajduje się w części bardziej oddalonej od Słońca. Zmiana prędkości jest zawsze taka, że linia łącząca planetę ze Słońcem zakreśla równe pola w równych odcinkach czasu. Jest to Drugie Prawo Keplera. Dziesięć lat później Kepler ogłosił jeszcze trzecie twierdzenie. Trzecie Prawo Keplera głosi, że druga potęga długości dłuższej średnicy orbity jest wprost proporcjonalna do trzeciej potęgi długości czasu jednokrotnego obiegu planety wokół Słońca. Zatem im dłuższa orbita, tym wolniej porusza się biegnąca po niej planeta. Wszystkie prawa Keplera zostały uzasadnione za pomocą wnioskowań indukcyjnych na podstawie przesłanek relacjonujących obserwacje nieboskłonu, na tle wiedzy z zakresu geometrii i budowy Wszechświata. Prawa Keplera nie cieszyły się powszechną akceptacją. Na przykład Galileusz odrzucał wszystkie trzy prawa. Sytuacja zmieniła się, kiedy Isaac Newton ogłosił, że trzy prawa Keplera wynikają logiczniez z prawa grawitacji, trzech zasad dynamiki i twierdzeń zwykłej geometrii Euklidesa. Prawo grawitacji stwierdza, że każde dwa ciała przyciągają się z siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi. Prawa dynamiki Newtona głoszą, że ciało, na które nie działa żadna siła, pozostaje w spoczynku lub ruchu jednostajnym po prostej, że zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły i dokonuje się w kierunku przyłożenia siły oraz że wzajemne oddziaływania dwóch ciał są równe co do wartości i przeciwnie skierowane. To wynikanie jest nie tylko nieoczywiste i niebanalne, ale również tajemnicze i niemal wzruszające. Mimo że fizykalne twierdzenia Newtona również były uzasadnione spekulatywnie, ale ich uzasadnienie było uważane za bardzo mocne, za konkluzywne w wysokim stopniu. Dostrzeżone wynikanie przenosi automatycznie całą wiarygodność z mechaniki Newtona na prawa Keplera. Dowód Newtona częściowo zaginął. Został przeprowadzony na nowo, we w pełni zadowalający sposób dopiero w XX w. przez Richarda Feynmana. Dowód ten zajmuje całą niewielką książkę.

Rachunki logiczne. Mamy więc z jednej strony wnioskowania, które są ewidentnie, oczywiście dedukcyjne, i takie, które równie oczywiście dedukcyjne nie są. Natomiast z drugiej strony mamy ważkie wnioskowania, odnośnie do których nie potrafimy dostrzec gołym okiem tego, czy są one dedukcyjne, czy nie. Te ostatnie są zwykle dla naszej wiedzy najdonioślejsze. Logicy chcą jednak zawsze wiedzieć, czy w danym wypadku faktycznie mamy do czynienia z wynikaniem (ewentualnie sprzecznością), czy nie. Są jednak zwykłymi śmiertelnikami i nie mają żadnego mistycznego wglądu w istotę wynikania. W każdym razie nie mają go więcej niż reszta ludzkiej rasy. Okazuje się, że sprawa nie jest mimo wszystko beznadziejna. Jak się bowiem wydaje, możliwe jest *sprowadzanie nieoczywistych przypadków zachodzenia lub niezachodzenia związków logicznych do przypadków oczywistych.* Można mianowicie wszystkie wątpliwe pod względem dedukcyjności wnioskowania rozkładać na czynniki pierwsze, na kroki niebudzące wątpliwości. Ta idea została wyrażona przez Sherlocka Holmesa w opowiadaniu *The Adventure of the Dancing Men* Arthura Conan Dyle'a w następujących słowach: „[...] w sumie bez trudu można konstruować ciągi wnioskowań, z których każde kolejne opiera się na poprzednich i każde samo w sobie jest proste. Jeśli, dokonawszy tego, usuniemy wszystkie pośrednie kroki, a następnie zaprezentujemy słuchaczom tylko punkt wyjścia i ostatnią konkluzję, możemy wywołać oszałamiające — choć, być może, bezpodstawnie oszałamiające — wrażenie".

Żądamy przy tym, aby procedura redukcji jednych związków logicznych do innych była przeprowadzana z najwyższą precyzją, co upodabnia logikę pod względem metody do matematyki. Motywem tego żądania jest fakt, że ocena konkluzywności wnioskowania jest materią delikatną i nawet niewielka niedokładność może prowadzić w tej materii do błędu. Właśnie ze względu na żądanie najwyższej precyzji mówimy o *rachunkach* logicznych, chcemy bowiem uczynić z oceny wnioskowań dedukcyjnych proces *obliczeniowy.* W tym celu konstruujemy *sztuczne języki.* Uczymy się badać związki logiczne zachodzące w tych językach. Te badania prowadzimy metodami matematycznymi. Z drugiej strony usiłujemy przenieść uzyskane wyniki na realne związki logiczne, zachodzące w autentycznych wnioskowaniach. Jest to możliwe pod tym względem, że obraz wynikania, dostarczony przez sztuczny język, jest dostatecznie wiernym odbiciem prawdziwego związku wynikania. Mówimy wówczas, że logika jest *miarodajna*. Widać więc, że logika jest bardziej podobna do fizyki niż do matematyki.

Badania wartości poznawczej nie można ograniczyć do własności formalnych. Zauważmy, że celem rozwijania rachunku logicznego była ocena konkluzywności jakichś faktycznie przeprowadznych wnioskowań. Tymczasem rachunek jest skonstruowany w taki sposób, że pozwala na ocenę zmyślonych wnioskowań, należących do jakiegoś sztucznego, specjalnie spreparowanego języka. Należy więc zbadać, w jakim stopniu uzyskane drogą rachunkową wyniki wolno przenieść na faktycznie interesujące nas wnioskowania. Jest to problem *miarodajności* rachunku logicznego. Należy rozważyć, czy uproszczony model wynikania, zbudowany w sztucznym języku, jest pod istotnymi względami dostatecznie podobny do wynikania zachodzącego między faktycznie interesującymi nas wyrażeniami. Jeśli tak jest, to mówimy, że zbudowany rachunek logiczny jest *miarodajny* dla określonego języka lub określonej grupy wnioskowań lub że jest z nią *współmierny*. W przeciwnym wypadku mówimy, że jest niemiarodajny (niewspółmierny). W odróżnieniu od własności formalnych miarodajność nie może być zbadana metodami czysto matematycznymi. Na tym etapie dociekań trzeba przeprowadzać analizy założeń rozmaitych teorii i analizy znaczeń wyrazów różnych językaów. Są to analizy typu filozoficznego.

Zauważmy, że logika pod wieloma względami przypomina — pod względem metody — matematykę. Z tego powodu często jest zaliczana do nauk dedukcyjnych (formalnych), a nawet traktowana jako dział matematyki. Dociekanie miarodajności rachunków upodabnia jednak logikę raczej do fizyki niż do matematyki. Badanie za pomocą metod matematycznych formalnych własności rachunku jest odpowiednikiem zmatematyzowanych konstrukcji fizyki teoretycznej, zaś filozoficzna analiza miarodajności rachunku jest odpowiednikiem eksperymentalnego sprawdzania teorii fizykalnej.

1.2 Elementy matematyki

Konstruując rachunki logiczne i badając ich własności, posługujemy się często pojęciami i metodami matematycznymi. W niniejszej książce będziemy odwoływać się do matematyki tylko na całkiem elementarnym poziomie. Obecnie przypomnimy te informacje, które będą przydatne w dalszej lekturze.

Pojęcie zbioru. Klasycznie pojmowany zbiór jest tworem określonym wyłącznie przez należące do tego zbioru przedmioty, zwane jego elementami. Na przykład elementami zbioru kóz są wszystkie kozy i tylko kozy, elementami zbioru liczb naturalnych są wszystkie liczby naturalne i tylko one. Często można wyobrażać sobie zbiór jako niematerialną listę, na ktorej kolejność nie odgrywa roli. Pisząc, że

$$x \in y,$$

stwierdzamy, że przedmiot x jest elementem zbioru y, czyli że przedmiot x należy do zbioru y. W przeciwnym razie piszemy, że

$$x \notin y.$$

Znaczy to, że przedmiot x nie jest elementem zbioru y, że nie należy do zbioru y. Zbiory, które mają skończenie wiele elementów, nazywamy *skończonymi*, a te, które mają nieskończenie wiele elementów, nazywamy *nieskończonymi*. Zbiory wolno też nazywać *klasami*.

Zbiór może zostać scharakteryzowany na dwa sposoby. Można po prostu wymienić elementy tego zbioru, umieszczając je w klamrowym nawiasie. Na przykład

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

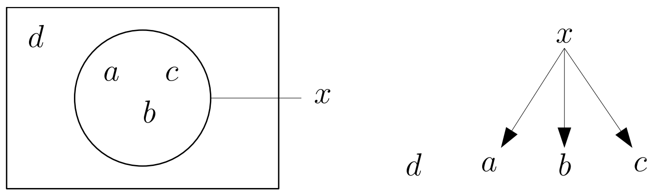
jest to zbiór, do którego należą wszystkie liczby: 0, 1, 2, 3, 4 oraz 5, i nic innego. Tym sposobem charakteryzowania można się posługiwać wyłącznie w odniesieniu do zbiorów skończonych. Zamiast tego możemy podać warunek konieczny i wystarczający przynależności do zbioru. Na przykład, jeśli $\mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych, to

$$\{x \in \mathbb{N} \colon x \leqslant 5\}$$

jest to ten sam zbiór, co poprzednio, a więc zbiór liczb naturalnych nie większych od 5. Taki sposób charakteryzowania zbioru określamy mianem abstrakcji, a klamrowy nawias z dwukropkiem mianem abstraktora. Przez abstrakcję możemy charakteryzować zarówno zbiory skończone, jak i nieskończone. Na przykład

$$\{x \in \mathbb{N} \colon x \geqslant 5\}$$

jest to zbiór liczb naturalnych nie mniejszych od 5. Do tego zbioru należą liczby: 5, 6, 7, 8 itd., bez końca. Zauważmy, że, posługując się abstraktorem, powinniśmy z lewej strony dwukropka podać zbiór nadrzędny, w którym wyróżniamy przedmioty spełniające warunek sformułowany z prawej strony. Ten zbiór nazywamy *rodzajem* nadrzędnym lub krótko rodzajem. Tylko wtedy, gdy rodzaj został z góry ustalony, wolno opuszczać to wskazanie, pisząc krótko $\{x \colon x \leqslant 5\}$. Zaniedbanie wskazania rodzaju jest poważnym błędem, który jeszcze bliżej omówimy. Rodzaj nadrzędny w stosunku do wszystkich zbiorów, które bierzemy pod uwagę, nazywa się *uniwersum dyskursu* lub krótko uniwersum, lub też *zbiorem uniwersalnym.* Ogólnie rzecz ujmując, z ważnych logicznych powodów, które staną się jasne później, nie wolno rozpoczynać mówienia ani myślenia, dopóki nie ustali się — przynajmniej domyślnie — uniwersum dyskursu. Na przeciwległym w stosunku do uniwersum biegunie leży *zbiór pusty*, oznaczany jako zbiór $\varnothing$. Jest to taki zbiór, który nie ma ani jednego elementu. Charakterystykę zbiorów warto



Tablica 1.3: Przedstawienie zbioru za pomocą pętli i grafu

niekiedy wspomagać wizualizacją. Znane są dwa podstawowe sposoby obrazowania zbiorów: pętla i graf. Jeśli zbiór jest symbolizowany przez pętlę, to wewnątrz pętli znajdują się elementy tego zbioru, a na zewnątrz przedmioty niebędące jego elementami. Granice zbioru uniwersalnego zaznaczamy za pomocą prostokątu. Jeśli zbiór jest symbolizowany przez graf, to strzałki prowadzą od symbolu zbioru do symboli jego elementów. Na tablicy 1.3 pokazaliśmy dla przykładu sposób obrazowania przypadku, w którym $a \in x$, $b \in x$ oraz $c \in x$, ale $d \notin x$.

Relacje między zbiorami. Trzy relacje między zbiorami zasługują na uwagę: *zawieranie*, *zawieranie właściwe* i *równość* (*identyczność*). Jak powiedzieliśmy, zbiór jest wyczerpująco określony przez jego elementy. Dlatego mówimy, że dwa zbiory są sobie równe (identyczne) wtedy i tylo wtedy, gdy mają te same elementy. W odniesieniu do zbiorów posługujemy się zwykłym znakiem równości, piszemy więc, że $x = y$. W przeciwnym razie piszemy, że $x \neq y$, i mówimy, że zbiory x i y są od siebie różne (różnią się od siebie). Mówimy dalej, że zbiór x zawiera się w zbiorze y (zbiór x jest podzbiorem zbioru y), skrótowo:

$$x \subseteq y,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru x jest też elementem zbioru y. Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów x i y:

$$x = y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (x \subseteq y \text{ oraz } y \subseteq x). \tag{1.6}$$

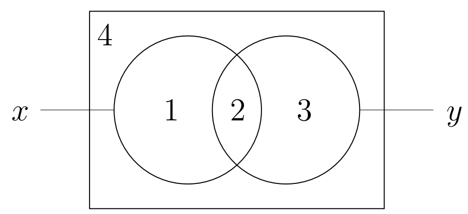
Jeśli bowiem zbiór x równa się ze zbiorem y, to tym samym jest jego podzbiorem. Skoro bowiem zbiory x i y mają te same elementy, to każdy element zbioru x jest elementem zbioru y i odwrotnie. Z drugiej strony, jeśli zbiór x zawiera się w zbiorze y oraz zbiór y zawiera się w zbiorze x, to zbiory te mają te same elementy, a więc są identyczne. Niekiedy posługujemy się pojęciem właściwego zawierania, które wyklucza równość zbiorów. Mówimy, że zbiór x zawiera się właściwie w zbiorze y (zbiór x jest podzbiorem właściwym zbioru y), skrótowo:

$$x \subset y,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru x jest elementem zbioru y, ale nie każdy element zbioru y jest elementem zbioru x. Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów x i y:

$$x \subset y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (x \subseteq y \text{ oraz } x \neq y). \tag{1.7}$$

Rzeczywiście, skoro każdy element zbioru x jest elementem zbioru y, to zbiór x zawiera się w zbiorze y, skoro zaś nie każdy element zbioru y jest elementem zbioru x, to zbiór x różni się od zbioru y. Z drugiej strony, jeżeli każdy element zbioru x jest elementem zbioru y, ale zbiory x i y różnią się od siebie, to nie każdy element zbioru y jest elementem zbioru x. W przeciwnym bowiem razie, na mocy twierdzenia (1.6), zbiór x równałby się ze zbiorem y. Relacje między zbiorami można uzmysłowić sobie za pomocą diagramu Venna



Tablica 1.4: Diagram Venna dla dwóch zbiorów

(tablica 1.4). Przypomnijmy, że prostokąt symbolizuje uniwersum dyskursu. Zbiór x zawiera się w zbiorze y dokładnie wtedy, gdy obszar 1 jest pusty. Zbiór x zawiera się właściwie w zbiorze y dokładnie wtedy, gdy obszar 1 jest pusty i zarazem obszar 3 jest niepusty. Zbiory te są identyczne dokładnie wtedy, gdy pusty jest i obszar 1, i obszar 3.

Działania na zbiorach. Na zbiorach, podobnie jak na liczbach, można wykonywać działania (operacje). Najprostszymi działaniami na zbiorach są:

mnożenie, którego wynik nazywa się *iloczynem*, *dodawanie*, którego wynik nazywa się *sumą*, i *odejmowanie*, którego wynik nazywa się *różnicą* zbiorów. Omawiając te działania będziemy się odwoływać do diagramu Venna, zaprezentowanego na tablicy 1.4. Nieco bardziej zaawansowanymi działaniami na zbiorach są: *potęgowanie*, którego wynik nazywa się *zbiorem potęgowym* lub *potęgą*. Wymienione działania są najbardziej typowymi działaniami na zbiorach i bywają określane jako działania mnogościowe. Odróżniamy od nich bardziej osobliwe działania na zbiorach: *mnożenie kartezjańskie*, którego wynik jest określany jako *produkt* lub jako *iloczyn kartezjański*, i *potęgowanie kartezjańskie*, które jest szczególnym przypadkiem kartezjańskiego mnożenia. Te dwa działania określamy zwykle jako *działania kartezjańskie* na zbiorach.

Iloczyn suma i różnica mnogościowa. Iloczynem zbiorów x i y nazywa się zbiór $(x \cap y)$, do którego należą wszystkie te i tylko te przedmioty, które należą zarówno do zbioru x, jak do zbioru y. Na tablicy 1.4 iloczynem zbiorów x i y jest obszar 2. Iloczyn nazywa się też przecięciem zbiorów lub ich częścią wspólną.

Sumą zbiorów x i y nazywa się zbiór $(x \cup y)$, do którego należą wszystkie te przedmioty, które należą do zbioru x, i wszystkie te przedmioty, które należą do zbioru y, i nic ponadto. Na tablicy 1.4 sumę zbiorów x i y stanowią obszary 1, 2 i 3.

Różnicą zbiorów x i y nazywa się zbiór $(x - y)$, do którego należą wszystkie te i tylko te przedmioty, które należą wprawdzie do zbioru x, ale nie należą do zbioru y. Na tablicy 1.4 różnicę zbiorów x i y stanowi obszar 1. Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest *dopełnienie*. Dopełnieniem zbioru x nazywa się zbiór $-x$, do którego należą wszystkie te i tylko te przedmioty, które należą do uniwersum dyskursu, ale nie należą do zbioru x. Dopełnienie jest więc odejmowaniem od zbioru uniwersalnego. Różnicę zbiorów x i y nazywa się często dopełnieniem zbioru y do zbioru x. Na tablicy 1.4 dopełnienie zbioru x stanowią obszary 3 i 4.

Najmniejsze zbiory. Wielką rolę odgrywa w logice znajdowanie *najmniejszego* zbioru spełniającego określone warunki. Najmniejszy zbiór, który spełnia określone warunki, jest to iloczyn rodziny wszystkich zbiorów, które spełniają te warunki.

Załóżmy, że x ma być zbiorem, do którego należą liczby: 3 i 5. W takim razie x może być zbiorem $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5, 88\}$, $\{3, 5\}$, może być całym zbiorem $\mathbb{N}$ liczb naturalnych i jeszcze innymi zbiorami. Jeśli jednak powiemy, że x jest najmniejszym zbiorem, do którego należą liczby: 3 i 5, to mamy na myśli iloczyn rodziny wszystkich tych zbiorów, a więc zbiór $\{3, 5\}$ i żaden inny. Przyjrzyjmy się jeszcze bardziej ambitnemu przykładowi. Zbiorem x, który spełnia dwa warunki:

$$\text{(a) } 0 \in x, \quad \text{(b) jeżeli } y \in x, \text{ to } y + 1 \in x,$$

może być zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb rzeczywistych, zbiór liczb zespolonych, zbiór, do którego należą wszystkie liczby naturalne i liczba $\sqrt{10}$, i nieskończenie wiele innych zbiorów. Ale najmniejszym zbiorem, który spełnia wymienione warunki, jest zbiór liczb naturalnych i tylko on jeden.

Potęgowanie mnogościowe. Zbiorem potęgowym (potęgą) zbioru x nazywa się zbiór $\wp(x)$, do którego należą wszystkie podzbiory zbioru x i tylko one. Przyjrzyjmy się przykładowo zbiorowi dwuelementowemu $x = \{a, b\}$. Jego potęgą jest zbiór

$$\wp(x) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Zwróćmy uwagę na to, że elementami zbioru potęgowego nie są same przedmioty a lub b, które należą do zbioru x, ale różne zbiory zawierające te przedmioty. Zauważmy też, że sam zbiór x oraz zbiór pusty zawsze należą do zbioru potęgowego, ponieważ każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem, a zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

Uogólnione iloczyn i suma mnogościowe. Zbiór, którego elelemntami są wyłącznie zbiory, nazywa się często *rodziną zbiorów.* Zbiory potęgowe, o których mówiliśmy, są przykładem rodzin zbiorów. Dodawanie i mnożenie może zostać uogólnione na dowolną rodzinę x zbiorów. Iloczyn

$$\bigcap x$$

rodziny x zbiorów jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów, które są elementami każdego zbioru wchodzącego w skład rodziny x. Suma

$$\bigcup x$$

rodziny x zbiorów jest to zbiór tych i tylko tych przedmiotów, które należą do co najmniej jednego zbioru echodzącego w skład rodziny x. Sumę rodziny zbiorów można sobie wyobrażać jako zsypanie zawartości wielu szuflad do jednego pojemnika, a iloczyn jako poszukiwanie okoliczności łączącej ofiary wielu przestępstw w związku z podejrzeniem działania seryjnego zabójcy. Jeśli więc, przykładowo,

$$x = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}\},$$

to wówczas

$$\bigcap x = \{2,3\},$$
$$\bigcup x = \{1,2,3,4,6,7,8\}.$$

Waga uogólnienia i jego trudność objawia się wtedy, gdy mamy do czynienia z rodzinami nieskończenie wielu zbiorów.

Pojęcie ciągu. Żeby omówić ostatnie działania, jakim obecnie chcemy się zająć, mianowicie działania kartezjańskie, musimy zapoznać się z pojęciem *ciągu*. Zbór, jak powiedzieliśmy, jest wyczerouјąco scharakteryzowany przez jego elementy. Natomiast ciąg zostaje scharakteryzowany przez elementy wraz z ich kolejnością. Dla podkreślenia tej różnicy, w wypadku ciągów, zamiast o elementach, mówimy o *wyrazach* ciągu. Zamiast nawiasu klamrowego posługujemy się nawiasem narożnym. Ciąg

$$\langle 1,3,1\rangle$$

jest trójwyrazowy, jego pierwszym wyrazem jest liczba 1, drugim liczba 3, a trzecim znów liczba 1. Jak powiedzieliśmy, dwa zbiory są identyczne dokładnie wtedy, gdy mają te same elementy. Dwa ciągi są identyczne dokładnie wtedy, gdy mają te same wyrazy na tych samych miejscach (ustawione w tej samej kolejności). Z tego też powodu w wypadku ciągu powtórzenia wyrazów są istotne, podczas gdy w odniesieniu do zbiorów nie mają znaczenia. Na przykład

$$\{1,3,1\} = \{1,3\} = \{3,1\} = \{1,1,3\} = \{3,3,1,1\},$$

ale

$$\langle 1,3,1\rangle \neq \langle 1,3\rangle,\ \langle 1,3,1\rangle \neq \langle 1,1,3\rangle \text{ itp.}$$

Ciągi dwuwyrazowe nazywamy *parami uporządkowanymi*, trójwyrazowe trójkami uporządkowanymi itd. Ciągi o skończonej liczbie wyrazów nazywamy ogólnie *krotkami*.

Ciąg nieskończony ma zawsze dokładnie tyle wyrazów, ile jest liczb naturalnych. Liczba wszystkich liczb naturalnych nazywa się $\aleph_0$ (wymawiaj: alef zero). Zbiór nieskończony może mieć $\aleph_0$ elementów lub więcej. Na przykład zbiór liczb rzeczywistych ma w pewnym sensie więcej elementów niż zbiór liczb naturalnych, podczas gdy zbiór liczb wymiernych, choć to brzmi dziwnie, ma dokładnie tyle elementów, co zbiór liczb naturalnych. Jeśli zbiór nieskończony ma więcej elementów niż zbiór liczb naturalnych, to elementów tego zbioru w żaden sposób nie można ustawić w ciąg. Mówimy wówczas, że ma nie tylko nieskończenie, ale też *nieprzeliczalnie* wiele elementów. Zbiory skończone i zbiory, które mają $\aleph_0$ elementów, nazywamy *przeliczalnymi*. Trudna i zawikłana problematyka nieskończoności i działań na zbiorach lub liczbach nieskończonych leży w kręgu zainteresowania *teorii mnogości*, specjalnej nauki leżącej na pograniczu logiki i matematyki.

Działania kartezjańskie. Zapoznawszy się z pojęciem ciągu, możemy przejść do kartezjańskiego mnożenia zbiorów. Produkt zbiorów x oraz y jest to zbiór $(x \times y)$, do którego należą wszystkie takie pary uporządkowane $\langle u, w\rangle$, że $u \in x$, a $w \in y$, i nic ponadto. Jest to więc zbiór tych par, których pierwszy wyraz należy do zbioru x, a drugi do zbioru y. Jeśli, przykładowo,

$$x = \{\heartsuit, \diamondsuit\},$$
$$y = \{\spadesuit, \clubsuit\},$$

to wówczas

$$x \times y = \{\langle\heartsuit, \spadesuit\rangle, \langle\heartsuit, \clubsuit\rangle, \langle\diamondsuit, \spadesuit\rangle, \langle\diamondsuit, \clubsuit\rangle\}.$$

Analogicznie produkt trzech lub większej liczby zbiorów jest to zbiór, do którego należą trójki lub odpowiednio dłuższe krotki, których kolejne wyrazy należą do kolejnych mnożonych po kartezjańsku zbiorów:

$$x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n = \{\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle : u_1 \in x_1, u_2 \in x_2, \ldots, u_n \in x_n\}.$$

Zbiór może być mnożony po kartezjańsku przez siebie. Mówimy wówczas o potęgowaniu kartezjańskim. Na przykład $x^2 = x \times x$, $x^3 = x \times x \times x$ itd. Wyrazy krotek należą wówczas, po prostu, do tego samego zbioru. Na przykład, jeśli $x = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$, to

$$x^2 = x \times x = \{\langle\heartsuit, \heartsuit\rangle, \langle\heartsuit, \diamondsuit\rangle, \langle\diamondsuit, \heartsuit\rangle, \langle\diamondsuit, \diamondsuit\rangle\}.$$

Jeśli mamy na myśli potęgowanie kartezjańskie zbioru x, to zbiór x^n nazywamy n-tą potęgą kartezjańską zbioru x. Drugą potęgę kartezjańską nazywamy też kwadratem kartezjańskim, a trzecią sześcianem kartezjańskim.

Relacje. W mowie potocznej przez relację rozumiemy coś zachodzącego między przedmiotami, o których mówimy, że pozostają w tej relacji. Na przykład ojcostwo pojmujemy jako coś łączącego ojca z synem. W matematyce bierzemy pod uwagę tylko swoisty szkielet tak pojmowanej relacji. Otóż relacja ojcostwa, z matematycznego punktu widzenia, jest to po prostu zbiór takich i tylko takich uporządkowanych par $\langle x, y\rangle$, że x jest ojcem y. Zatem takie pary, jak Mieszko I i Bolesław Chrobry, Bolesław Chrobry i Mieszko II, Kazimierz Jagiellończyk i Zygmunt Stary należą do relacji ojcostwa, a takie pary, jak Bolesław Chrobry i Mieszko I, Bolesław Chrobry i Bolesław Chrobry, Bolesław Chrobry i Kazimierz Jagiellończyk do niej nie należą. Możemy mówić o relacjach jednowyrazowych, dwuwyrazowych, trójwyrazowych itd. Ogólnie rzecz biorąc relacja n-wyrazowa jest to zbiór n wyrazowych ciągów. Dokładniej, relacja n wyrazowa w zbiorach: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jest to dowolny podzbiór produktu $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ Zbiór X_i nazywamy i-tą dziedziną tej relacji, a sumę wszystkich dziedzin polem tej relacji. Pisząc, że

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in R,$$

stwierdzamy, że krotka $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ należy do relacji R, innymi słowy stwierdzamy, że relacja R zachodzi między przedmiotami: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w odpowiedniej kolejności. Jeżeli rolę wszystkich dziedzin odgrywa tan sam zbiór X, to mówimy o relacji w zbiorze X.

Najważniejszą rolę odgrywają relacje dwuwyrazowe, zwane relacjami *binarnymi*, czyli zbiory uporządkowanych par. Niekiedy pierwszą dziedzinę relacji binarnej nazywa się po prostu dziedziną, a drugą dziedzinę przeciwdziedziną tej relacji.

Relacja R jest zwrotna w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle x, x\rangle \in R$ dla dowolnego elementu x zbioru X. Przykładem relacji zwrotnej w zbiorze ludzi jest znajomość, ponieważ każdy zna samego siebie.

Relacja R jest symetryczna w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle y, x\rangle \in R$, jeśli $\langle x, y\rangle \in R$, dla dowolnych elementów x, y zbioru X. Przykładem relacji symetrycznej w zbiorze ludzi jest małżeństwo, ponieważ, jeśli x jest współmałżonkiem y, to y jest współmałżonkiem x.

Relacja R jest przechodnia w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy, dla dowlnych elementów x, y, z zbioru X, jeśli $\langle x, y\rangle \in R$ oraz $\langle y, z\rangle \in R$, tó również $\langle x, z\rangle \in R$. Przykładem relacji przechodniej jest bycie wyższym, ponieważ x jest wyższy od z, jeśli x jest wyższy od y, a y jest wyższy od z.

Relacja R jest równoważnościowa w zbiorze x wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona w tym zbiorze zwrotna, symetryczna i przechodnia. Przykładem relacji równoważnościowej jest bycie tego samego wzrostu i leżenie na tej samej szerokości geograficznej. Zauważmy przy tym, że leżenie na tej samej długości geograficznej nie jest relacją równoważnościową.

Funkcje. Funkcję pojmujemy jako przyporządkowanie jednego przedmiotu innemu przedmiotowi. Mówimy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór

Y (funkcja f przekształca zbiór X w zbiór Y),

$$f\colon X \longrightarrow Y, \tag{1.8}$$

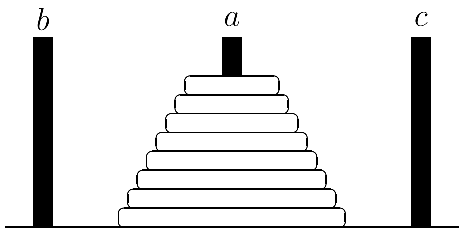
wtedy i tylko wtedy, gdy każdemu elementowi x zbioru X zostaje przyporządkowany dokładnie jeden element $f(x)$ zbioru Y, zwany wartością funkcji f w punkcie x lub obrazem przedmiotu x wyznaczonym przez funkcję f. Jeśli $X' \subseteq X$, to zbiór $f(X')$, do którego należą wszystkie wartości funkcji f w punktach należących do zbioru X', nazywamy obrazem zbioru X' wyznaczonym przez funkcję f. Zbiór X nazywa się dziedziną, a zbiór Y przeciwdziedziną funkcji f. Funkcje są też nazywane przekształceniami lub odwzorowaniami.

Argumentami funkcji mogą być krotki. Jeśli argumentami funkcji są pary uporządkowane, mówimy o funkcji dwóch zmiennych, jeśli trójki, mówimy o funkcji trzech zmiennych itd. Funkcję

$$f\colon X \times X \times \cdots \times X \longrightarrow X \tag{1.9}$$

n zmiennych z tego samego zbioru X przyjmującą wartości również z tego samego zbioru X, nazywamy *operacją* lub (*działaniem*) w zbiorze X. Wartość takiej funkcji nazywamy *wynikiem* działania. Na przykład dodawanie jest działaniem w zbiorze liczb naturalnych, każdej parze $\langle x, y\rangle$ liczb naturalnych przyporządkowuje bowiem liczbę naturalną z, zwaną sumą liczb x i y.

Rekurencja (indukcja matematyczna). Rekurencja jest ogólną metodą dowodzenia twierdzeń i definiowania pojęć dotyczących zbiorów nieskończonych, ale przeliczalnych. Chodzi zatem o zbiór liczb naturalnych i dowolne zbiory, które mają tyle samo elementów, co on.



Tablica 1.5: Wieża z Hanoi

Zacznijmy od słynnego przykładu, zwanego wieżą z Hanoi. Ilustrację tego przykładu przedstawiamy na tablicy 1.5. Wyobraźmy sobie trzy pręty: a, b i c. Na pręt a nadziano pewną liczbę krążków, ułożonych jeden na drugim, malejącymi średnicami ku górze. W naszym wypadku jest to osiem krążków.

Zadanie polega na przeniesieniu całej wieży na pręt b. Wolno przy tym dowolnie przenosić krążki między prętami a, b i c z tym, że w każdym ruchu wolno przenosić tylko jeden krążek, a ponadto nigdy nie wolno położyć większego krążka na mniejszym. Zastanówmy się, ile ruchów wystarczy, żeby tego dokonać.

Myślenie rekurencyjne polega na tym, żeby zaczynać od najprostszych przypadków i poszukiwać różnicy między przypadkami prostszymi, a przypadkami minimalnie bardziej skomplikowanymi. Umówmy się, że x_n będzie liczbą ruchów, które trzeba wykonać, żeby przenieść z pręta a na pręt b wieżę liczącą n krążków. Jeśli $n = 0$, to znaczy, wieży nie ma w ogóle, trzeba wykonać 0 ruchów. Jeśli $n = 1$, to znaczy wieża składa się z jednego krążka, trzeba wykonać jeden ruch — po prostu przenieść jedyny krążek na pręt b. Przy dwóch krążkach należy najpierw przenieść mniejszy na pręt pomocniczy c, następnie większy krążek na b i wreszcie mniejszy z pręta pomocniczego c na b. Zatem

$$x_0 = 0,$$
$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = 3.$$

Istotą rekurencji jest uchwycenie różnicy między wieżą złożoną z n krążków, a wieżą złożoną z $n+1$ krążków. Załóżmy, że umiemy już przenieść wieżę o n krążkach z jednego pręta drugi. Żeby przenieść wieżę o jeden krążek wyższą, wieżę o $n+1$ krążkach, powinniśmy najpierw przenieść n górnych krążków na pręt pomocniczy — to umiemy — następnie przenieść najwięszy krążek na pręt docelowy i wreszcie przenieść pozostałe n krążków z pręta pomocniczego na docelowy. Mamy zatem dwukrotnie więcej ruchów niż przy przenoszeniu n krążków i jeszcze jeden ruch, w którym przenosimy największy krążek:

$$x_{n+1} = 2 \cdot x_n + 1.$$

Tę zależność nazywamy *krokiem rekurencyjnym*, podczas gdy ustalenie wyniku dla najprostszego przypadku, zwykle 0 lub 1, nazywamy *początkiem rekurencji*. Założenie, że potrafimy rozwiązać problem dla wartości n, nazywamy *założeniem rekurencyjnym*. Początek rekurencji, w którym prowadzimy obliczenia dla najmniejszej wartości n, i krok rekurencyjny, w którym określamy zależność między n a $n + 1$, składają się na rekurencję *po wartości* n, krótko: *po* n, które nazywamy *parametrem rekurencyjnym*. Zanjąc początek rekurencji i krok rekurencyjny, jesteśmy w stanie policzyć szukaną wartość dla dowolnej wartości parametru rekurencyjnego. W wypadku wieży z Hanoi $x_3 = 7$, $x_4 = 15$, $x_5 = 31$, $x_6 = 63$, $x_7 = 127$, $x_8 = 255$ itd. Zatem przeniesienie z pręta a na pręt b wieży złożonej z ośmiu krążków wymaga 255 ruchów.

Dowody rekurencyjne. Rekurencja jest metodą dowodzenia twierdzeń o zbiorze liczb naturalnych i o wszelkich zbiorach mających tyle samo, co on, elementów. Jeśli chcemy udowodnić, że każda liczba naturalna apełnia warunek W, dowodzimy, że

(a) liczba 0 spełnia warunek W,

(b) jeśli n spełnia warunek W, to $n + 1$ również spełnia warunek W.

Twierdzenie (a) jest początkiem rekurencji, a twierdzenie (b) jest krokiem rekurencyjnym. Generalnie rzecz biorąc, początek rekurencji można wybrać dowolnie. Może to być liczba 0, liczba 1 lub inna liczba naturalna. W rezultacie otrzymujemy dowód tego, że warunek W jest spełniony przez każdą liczbę naturalną, poczynając od tej, którą uznaliśmy za początek rekurencji. Analogicznie postępujemy z dowolnymi przedmiotami ustawionymi w ciąg. Dowodzimy, że pierwszy z nich spełnia pewien warunek i że spełnianie tego warunku przenosi się na kolejny wyraz ciągu.

Rozwiążmy proste zadanie rekurencyjne. Należy udowodnić, że — dla dowolnej liczby naturalnej n — suma n pierwszych liczb naturalnych równa się liczbie $(n + 1)/2$ pomnożonej przez n, to znaczy

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = n \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Wiemy już, że musimy zbadać początek rekurencji, a następnie krok rekurencyjny. W naszym wypadku początkiem rekurencji jest liczba $n = 1$. Widać, że spełnia ona dowodzoną zależność:

$$1 = 1 \cdot \frac{1+1}{2}.$$

Należy teraz wykonać krok rekurencyjny. Przyjmijmy założenie rekurencyjne, to znaczy, przyjmijmy, że dowodzona zależność jest spełniona przez pewną liczbę n, i zastanówmy się, co dzieje się z liczbą $n + 1$. Widzimy, że

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \left(n \cdot \frac{n+1}{2}\right) + (n + 1).$$

Wiemy to z założenia indukcyjnego. Stawierdza ono, że sumę n pierwszych liczb umiemy policzyć. Nie wiemy jeszcze tylko, jak dodać do niej ostatnią, największą liczbę. Wykonamy teraz zwykłe przekształcenia po prawej stronie:

$$\begin{aligned}\left(n \cdot \frac{n+1}{2}\right) + (n+1) = \left((n+1) \cdot \frac{n}{2}\right) + (n+1) &= \\ = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) &= \\ = (n+1) \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right) &= \\ = (n+1) \cdot \left(\frac{(n+1)+1}{2}\right)&.\end{aligned}$$

To zaś jest dowodzona zależność dla wartości $n+1$. Na początku rekurencji udowodniliśmy zatem, że liczba 1 spełnia zadaną zależność. W kroku rekurencyjnym wykazaliśmy, że liczba $n+1$ spełnia tę zależność, jeśli tylko zależność jest spełniona przez liczbę n. Wynika stąd, że każda liczba naturalna, począwszy od 1, spełnia zadaną zależność.

Definicje rekurencyjne. Rekurencji można używać do charakteryzowania zbiorów, które mają co najwyżej tyle elementów, ile jest liczb naturalnych (to znaczy $\aleph_0$). Zastanówmy się, jak można zdefiniować zbiór liczb parzystych. Jest wiele sposobów. Można, między innymi, powiedzieć, że zbiór liczb parzystych jest to zbiór, do którego należy co druga liczba naturalna, począwszy od zera, i nic więcej. To właśnie jest definicja rekurencyjna, choć niedbale wysłowiona. Bardziej elegancko można powiedzieć, że 0 należy do zbioru liczb parzystych oraz, jeśli n należy do zbioru liczb parzystych, to $n+2$ również należy do tego zbioru, i nic więcej do niego nie należy. Zamiast niezbyt zgrabnego zwrotu „i nic więcej" używamy znanego nam już pojęcia najmniejszego zbioru. Powiemy więc ostatecznie, że zbiór liczb parzystych jest to *najmniejszy* taki zbiór, że

- 0 należy do tego zbioru,
- jeśli n należy do tego zbioru, to $n+2$ również do niego należy.

Pierwsze stwierdzenie jest początkiem rekurencji, a drugie krokiem rekurencyjnym. Zastrzeżenie, że chodzi o najmniejszy zbiór spełniający dane warunki, jest zawsze istotne. Przecież sformułowane warunki są spełnione również przez zbiór liczb naturalnych, wymiernych i rzeczywistych.

Rozważmy jeszcze przykład pozamatematyczny. Za pomocą rekurencji można zdefiniować, powiedzmy, pojęcie dynastii Piastów. Możemy stwierdzić, że dynastia Piastów jest to najmniejszy taki zbiór osób, że

- Mieszko I należy do dynastii Piastów,

- jeżeli x należy do dynastii Piastów, x jest mężczyzną oraz y jest prawowitym potomkiem x, to y również należy do dynastii Piastów.

Zgodnie z tą definicją Bolesław Śmiały należy do dynastii Piastów. Skoro bowiem Mieszko I należy do tej dynastii, to Bolesław Chrobry również do niej należy. Wobec tego należy do niej Mieszko II Lambert. Wobec tego należy do niej Kazimierz Odnowiciel, a wobec tego należy do niej Bolesław Śmiały.

Rekurencyjnie można definiować również bardziej złożone zbiory, na przykład relacje. Pokażemy, jak można zdefiniować relację bycia prawowitym potomkiem:

- jeśli osoba x jest małżeńskim dzieckiem osoby y, to osoba x jest również prawowitym potomkiem osoby y,

- jeżeli osoba x jest małżeńskim dzieckiem osoby y oraz osoba y jest prawowitym potomkiem osoby z, to również osoba x jest prawowitym potomkiem osoby z.

W takim układzie liczboma naturalnym odpowiada swoista odległość między potomkiem a przodkiem. Relacja dziecka do rodzica odpowiada liczbie 1, relacja wnuka do dziadka (babki) liczbie 2 itd.

Rekurencyjnie zdefiniowane zbiory świetnie się nadają do przeprowadzania dowodów rekurencyjnych. Jeśli wykażemy, że liczba 0 spełnia pewien warunek i że spełnianie tego warunku przenosi się na liczbę o dwa większą, to udowodnimy, że dany warunek jest spełniony przez każdą liczbę parzystą. Jeśli wykażemy, że Mieszko I miał pewną własność i że własność tę dziedziczy zawsze prawowity potomek, to tym samym udowodnimy, że wszyscy reprezentanci dynastii Piastów mieli tę własność.

Rozdział 2

Klasyczny rachunek zdań

Podstawowego we współczesnej logice modelu wynikania i innych badanych zależności dostarcza *klasyczny rachunek logiczny*, zwany też *logiką standardową*. W jego ramach wyróżniamy najprostszą część, zwaną *klasycznym rachunkiem zdań*, i właściwą, bardziej zaawansowaną *logikę pierwszego rzędu*.

2.1 Język klasycznego rachunku zdań

Klasyczny rachunek zdań jest najprostszą teorią logiczną. Omawiając język klasycznego rachunku zdań, określimy najpierw zasób wyrażeń, a następnie ustalimy sposób ich rozumienia. Kluczowym pojęciem będzie tu pojęcie interpretacji.

Stopnie języka. O czymkolwiek chcemy mówić, o tym musimy mówić w jakimś języku. W logice często musimy mówić o pewnym języku lub o jego wyrażeniach. Również wtedy, gdy mówimy *o* jakimś języku, musimy zarazem mówić *w* pewnym języku. W takiej sytuacji język, o którym mówimy, nazywa się *językiem przedmiotowym*, a język, w którym mówimy, nazywa się *metajęzykiem*. Metajęzykiem może być ten sam język, który jest językiem przedmiotowym, lub jakiś inny język. Na przykład, mówiąc:

> zdanie „ravens are black” znaczy, że kruki są czarne,

mówimy w języku polskim o pewnym zdaniu języka angielskiego, czyniąc w ten sposób język angielski językiem przedmiotowym, a język polski metajęzykiem. Gdy natomiast mówimy:

> zdanie „kruki są czarne” znaczy, że kruki są czarne,

posługujemy się językiem polskim zarówno w funkcji języka przedmiotowego, jak i metajęzyka. W logice często językiem przedmiotowym jest któryś ze specjalnie dla logiki skonstruowanych języków sformalizowanych, a metajęzykiem jest język mieszany, złożony z pewnych, zwykle nieco ulepszonych, wyrażeń języka naturalnego, z pewnych wyrażeń należących do języka filozoficznego i z pewnych wyrażeń języka jakiejś teorii matematycznej.

Prostym i powszechnie stosowanym narzędziem, służącym do mówienia o wyrażeniach jest cudzysłów. Ujmując jakieś wyrażenie w cudzysłów, tworzymy automatycznie nazwę tego wyrażenia. Powiemy zatem, że

kot jest ssakiem, kot miewa zwykle cztery nogi,

„kot” jest rzeczownikiem, „kot” składa się z trzech liter.

Nazwa cudzysłowowa jest skrótem rozbudowanej nazwy strukturalnoopisowej. Ujmując w cudzysłów rzeczownik „kot”, mówimy: wyraz złożony z trzech kolejno następujących po sobie liter: *ka*, *o*, *te*. Niekiedy chcemy mówić bardziej ogólnie o grupie wyrażeń, które mają podobną, analogiczną budowę. Do tego służą *quasi-cudzysłowy*, mające kształt górnych narożników. Na przykład zbudowany za pomocą zwykłego cudzysłowu napis:

„$\mathcal{A}$ lub $\mathcal{B}$”

znaczy dokładnie tyle, co ciąg znaków: wielkie *a*, spacja, małe *el*, małe *u*, małe *be*, spacja, wielkie *be*. Natomiast zbudowany za pomocą quasi-cudzysłowu napis:

$\ulcorner\mathcal{A}$ lub $\mathcal{B}\urcorner$,

w którym $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ są dowolnymi zdaniami, znaczy tyle, co: dowolny napis, złożony kolejno z dowolnego zdania, po którym następuje spacja, po której następuje napis „lub”, po którym następuje spacja, po której następuje dowolne zdanie. Znaki „$\mathcal{A}$” i „$\mathcal{B}$” należą do metajęzyka, do języka, w którym mówimy. Quasi-cudzysłów tym różni się od cudzysłowu, że ten pierwszy nie działa na zmienne, za których pomocą mówimy o interesujących nas wyrażeniach — nie działa na zmienne, które należą do metajęzyka. Zmienna metajęzykowa ujęta w cudzysłów staje się nazwą samej siebie, podczas gdy ta sama zmienna w quasi-cudzysłowie pozostaje sobą.

Kiedy konstruujemy i badamy rachunki logiczne, tworzone przez nas języki tych rachunków są językami przedmiotowymi. Natomiast język, w którym mówimy o tych rachunkach, metajęzyk, jest specjalnie przystosowanym językiem naturalnym. Posługujemy się w nim m.in. licznymi pojęciami matematycznymi.

Alfabet. Najprostsze, niepodzielne symbole, z których składają się wyrażenia klasycznego rachunku zdań, tworzą *alfabet* budowanego przez nas języka. Do alfabetu języka klasycznego rachunku zdań należą:

- stałe terminy logiczne „$\neg$”, „$\wedge$”, „$\vee$”, „$\rightarrow$”, „$\equiv$”,
- schematyczne litery zdaniowe „p”, „q”, „r”, „p_1”, „p_2” itp.,
- nawiasy.

Przyjmujemy, że w alfabecie jest dokładnie tyle liter zdaniowych, ile jest liczb naturalnych - czyli jest $\aleph_0$ liter. Symbol „$\neg$” nazywa się funktorem *negacji*, symbol „$\wedge$” nazywa się funktorem *koniunkcji*, symbol „$\vee$” nazywa się funktorem *alternatywy*, symbol „$\rightarrow$” nazywa się funktorem *implikacji*, a symbol „$\equiv$” nazywa się funktorem *równoważności*. Zamiast o funktorze wolno mówić o spójniku, znaku lub symbolu negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji lub równoważności. Nawiasy są znakami interpunkcyjnymi i służą do zaznaczania granicy wyrażeń złożonych, zbudowanych za pomocą funktorów, które występują w tych nawiasach. W metajęzyku o dowolnych wyrażeniach języka klasycznego rachunku zdań będziemy mówić za pomocą zmiennych „$\mathcal{A}$”, „$\mathcal{B}$”, „$\mathcal{C}$”, „$\mathcal{D}$”, z indeksami (np. „$\mathcal{A}_1$”, „$\mathcal{A}_2$”) lub bez indeksów.

Zbiór wyrażeń. Słownik, czyli zasób poprawnie zbudowanych wyrażeń, języka klasycznego rachunku zdań jest to *najmniejszy* zbiór spełniający warunki:

- wszystkie schematyczne litery zdaniowe są wyrażeniami,
- jeżeli $\mathcal{A}$ jest wyrażeniem, to $\ulcorner(\neg\mathcal{A})\urcorner$ również jest wyrażeniem,
- jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są wyrażeniami, to $\ulcorner(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})\urcorner$, $\ulcorner(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})\urcorner$, $\ulcorner(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})\urcorner$ oraz $\ulcorner(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})\urcorner$ również są wyrażeniami.

Powiedzieliśmy, że słownik klasycznego rachunku zdań jest to najmniejszy zbiór, który spełnia sformułowane warunki. Znaczy to, że poprawnie zbudowanymi wyrażeniami klasycznego rachunku zdań są wszystkie i *tylko* te zbitki znaków, których uznania za wyrażenia te warunki wymagają. Każde wyrażenie klasycznego rachunku zdań powstaje przez zastosowanie skończoną liczbę razy sformułowanych warunków. Innych wyrażeń w słowniku klasycznego rachunku zdań nie ma.

Sens sformułowanych warunków jest taki, że każda litera zdaniowa sama jest wyrażeniem, że funktor negacji tworzy wyrażenie z jednym dowolnym wyrażeniem, a pozstałe funktory tworzą wyrażenia z dwoma dowolnymi wyrażeniami. Na przykład, zgodnie z przyjętą definicją, napis

$$((\neg p) \to (q \vee r))$$

jest wyrażeniem klasycznego rachunku zdań dokładnie wtedy, kiedy wyrażeniami są obydwa napisy: „$(\neg p)$”, „$(q \wedge r)$”. Pierwszy z nich jest wyrażeniem dokładnie wtedy, gdy wyrażeniem jest litera „p”, a drugi jest wyrażeniem dokładnie wtedy, gdy wyrażeniami są litery: „q” i „r”. Ponieważ zaś każda litera jest wyrażeniem, to napisy: „$(\neg p)$”, „$(q \wedge r)$” też są wyrażeniami, a więc wyjściowy napis jest wyrażeniem klasycznego rachunku zdań. Natomiast napis

$$((pq) \wedge r)$$

nie jest wyrażeniem. Byłby nim, gdyby obydwa napisy: „(pq)” i „r” były wyrażeniami. Drugi z nich, jako pojedyńcza litera zdaniowa, jest, co prawda, wyrażeniem, ale pierwszy nie podpada pod żaden warunek przyjętej definicji. Ponieważ zaś zbiór wyrażeń został określony jako najmniejszy zbiór spełniający zadane warunki, musimy uznać, że napis „(pq)” nie jest wyrażeniem. Wobec tego wyrażeniem nie jest też napis „$((pq) \wedge r)$”. Omówione przykłady pozwalają na uchwycenie rekurencyjnego charakteru definicji wyrażenia. Aby ocenić, czy pewien napis jest wyrażeniem, musimy, krok po kroku, ujawnić sposób jego złożenia z najmniejszych komponentów, to znaczy z liter zdaniowych, za pomocą funktorów. Litery odpowiadają najmniejszej liczbie naturalnej — są początkiem rekurencji — podczas gdy każde złożenie wyrażenia za pomocą funktora stanowi przejście na poziom złożenia wyższy o jeden.

Litery zdaniowe są wyrażeniami *prostymi* (*atomicznymi*), a pozostałe wyrażenia nazywają się wyrażeniami *złożonymi* (*molekularnymi*). Każde wyrażenie złożone składa się z pewnego funktora logicznego, z jednego lub dwóch wyrażeń, które nazywają się *argumentami* tego funktora, i z nawiasów, które wskazują na granice wyrażenia. Symbol, który tworzy wyrażenie razem ze swoimi argumentami i nawiasami, nazywa się *funktorem głównym* tego wyrażenia. Funktor, który tworzy wyrażenie złożone z jednym argumentem, nazywa się *jednoargumentowym*, a funktor, który tworzy wyrażenie z dwoma argumentami, nazywa się *dwuargumentowym*. Wszystkie argumenty funktora składają się na *zasięg* tego funktora.

Wyrażenie $\ulcorner(\neg \mathcal{A})\urcorner$ nazywa się *negacją* wyrażenia $\mathcal{A}$ i jest odczytywane: nie jest tak, że $\mathcal{A}$. Symbol „$\neg$” jest funktorem głównym tej negacji, a wyrażenie $\mathcal{A}$ nazywa się *podstawą* tej negacji. Zamiast o negacji wolno też mówić o *zaprzeczeniu* wyrażenia $\mathcal{A}$. Wyrażenie $\ulcorner(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})\urcorner$ nazywa się *koniunkcją* wyrażeń $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i jest odczytywane: $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, ewentualnie: $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Funktorem głównym jest symbol „$\wedge$”, a wyrażenia $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazywają się *czynnikami* tej koniunkcji. Wyrażenie $\mathcal{A}$ nazywa się pierwszym, a wyrażenie $\mathcal{B}$ drugim czynnikiem tej koniunkcji. Wyrażenie $\ulcorner(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})\urcorner$ nazywa się *alternatywą* wyrażeń $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i jest odczytywane: $\mathcal{A}$ lub $\mathcal{B}$. Funktorem głównym jest symbol „$\vee$", a wyrażenia $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazywają się *składnikami* tej alternatywy. Wyrażenie $\mathcal{A}$ nazywa się pierwszym, a wyrażenie $\mathcal{B}$ nazywa się drugim składnikiem tej alternatywy. Wyrażenie $\ulcorner(\mathcal{A} \to \mathcal{B})\urcorner$ nazywa się *implikacją* o poprzedniku $\mathcal{A}$ i następniku $\mathcal{B}$, wyrażenie $\mathcal{A}$ nazywa się *poprzednikiem*, a wyrażenie $\mathcal{B}$ *następnikiem* tej implikacjii. Omawianą implikację należy odczytywać: jeżeli $\mathcal{A}$, to $\mathcal{B}$, ewentualnie: $\mathcal{A}$ tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}$. Jej funktorem głównym jest symbol „$\to$". Wyrażenie $\ulcorner(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})\urcorner$ nazywa się *równoważnością* wyrażeń $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ i jest odczytywane: $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}$. Funktorem głównym jest symbol „$\equiv$", a wyrażenia $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazywają się *stronami* tej równoważności. Wyrażenie $\mathcal{A}$ nazywa się lewą, a wyrażenie $\mathcal{B}$ prawą stroną tej równoważności.

W bardziej złożonych wyrażeniach natłok nawiasów może utrudnić rozumienie. Dlatego zawrzemy pewne umowy, które pozwalają na opuszczenie niektórych nawiasów. Umowy te obowiązują o tyle, o ile nie mogą prowadzić do nieporozumień. Po pierwsze, zazwyczaj będziemy zezwalać na opuszczenie najbardziej zewnętrznych nawiasów. Na przykład, zamiast „$(p \wedge (q \vee r))$" napiszemy krócej „$p \wedge (q \vee r)$". Po drugie, umówimy się odnośnie do kolejności działania funktorów na argumenty. Podobną umowę znamy ze szkolnej matematyki. Aby oszczędzić na nawiasach, umawiamy się zwykle, że przy braku nawiasów wykonujemy działania w kolejności: mnożenie, dzielenie, dodawanie i odejmowanie. Na mocy tej umowy, zamiast „$(2 \cdot 5) + 3$", wolno nam napisać „$2 \cdot 5 + 3$". Natomiast w wyrażeniu „$2 \cdot (5 + 3)$" nie wolno opuścić nawiasu. W klasycznym rachunku zdań analogicznie ustalamy następującą kolejność działania funktorów na argumenty:

$$\neg \;\; \wedge \;\; \vee \;\; \to \equiv .$$

Umawiamy się przy tym, że wolno opuszczać te nawiasy, których należałoby się domyślać z uwagi na tę kolejność działania funktorów. Na przykład wyrażenie „$p \wedge q \vee r$" znaczy tyle, co wyrażenie „$(p \wedge q) \vee r$", ale już nie tyle, co wyrażenie „$p \wedge (q \vee r)$". Jeśli kolejności działania nie wyznaczają ani nawiasy, ani dotychczas zawarte umowy, to wykonujemy działania wedle kolejności zapisu, począwszy od lewej strony, na przykład wyrażenie „$p \wedge q \wedge r$" jest skrótem wyrażenia „$(p \wedge q) \wedge r$", a nie wyrażenia „$p \wedge (q \wedge r)$." Podkreślmy, że zawarte właśnie umowy zezwalają na opuszczanie niektórych nawiasów, ale go nie nakazują.

Zasady dwuwartościowości i ekstensjonalności. Znaczeniem wyrażeń klasycznego rachunku zdań rządzą nade wszystko dwa założenia, które noszą miano zasady *dwuwartościowości* i zasady *ekstensjonalności*.

Zgodnie z zasadą dwuwartościowości każde zdanie ma dokładnie jedną z dwóch wartości logicznych: prawdę lub fałsz. Wykluczone są więc zdania, które nie mają żadnej wartości logicznej, zdania, które mają kilka wartości logicznych, i zdania, które mają wartości inne od dwóch przyjętych w tym rachunku. Nie rozstrzygamy przy tym, czy takich zdań w ogóle nie ma, czy też są, ale pozostają poza zasięgiem obowiązywania klasycznego rachunku zdań.

W klasycznym rachunku zdań bierzemy pod uwagę tylko niektóre związki między zdaniami, mianowicie tylko te, które można wyrazić za pomocą funktorów *prawdziwościowych*. Funktor zdaniowy nazywa się funktorem prawdziwościowym wtedy i tylko wtedy, gdy wartość logiczna zdania złożonego, zbudowanego za pomocą tego funktora, zależy wyłącznie od wartości logicznych argumentów tego funktora.

Na przykład spójnik „oraz" jest prawdziwościowy. Jeśli tym spójnikiem połączymy dwa zdania prawdziwe, otrzymamy również zdanie prawdziwe. Jeśli natomiast połączymy tym spójnikiem dwa zdania, z których co najmniej jedno jest fałszywe, to uzyskamy zdanie fałszywe. Treść tych zdań jest przy tym obojętna. Wymiana jednego zdania prawdziwego na inne zdanie prawdziwe lub jednego zdania fałszywego na inne zdanie fałszywe nie wpływa na wartość logiczną zdania złożonego. Jeśli na przykład w prawdziwym (przy założeniu prawdziwości opowiadania o Tristanie i Izoldzie) zdaniu

Otello kocha Desdemonę oraz Cassio kocha Desdemonę

zastąpimy prawdziwe zdanie „Cassio kocha Desdemonę" przez inne prawdziwe zdanie, powiedzmy „$3 + 5 = 8$", to uzyskamy zdanie

Otello kocha Desdemonę oraz $3 + 5 = 8$.

To zdanie będzie miało taką samą wartość logiczną jak pierwsze zdanie. W naszym wypadku oba te zdania są prawdziwe.

Nie wszystkie spójniki zdaniowe są funktorami prawdziwościowymi. Rozważmy spójnik „ponieważ". Podobnie jak „oraz", również „ponieważ" tworzy zdanie złożone wraz z dwoma argumentami, będącymi zdaniami. Do ustalenia wartości logicznej zdania złożonego nie wystarczy jednak znajomość wartości logicznych zdań składowych. Na przykład zdanie

Otello jest nieszczęśliwy, ponieważ sądzi, że Desdemona kocha Cassia

jest zbodowane z funktora zdaniowego „ponieważ" oraz jego dwóch argumentów: „Otello jest nieszczęśliwy", „Otello sądzi, że Desdemona kocha Cassia".

Obydwa argumenty są zdaniami prawdziwymi. Ich prawdziwość nie wystarcza jednak do ustalenia wartości logicznej zdania złożonego. Można się o tym przekonać, zastępując zdanie „Otello sądzi, że Desdemona kocha Cassia” przez inne zdanie prawdziwe, powiedzmy „3+5 = 8”. Powstanie wówczas zdanie

Otello jest nieszczęśliwy, ponieważ $3 + 5 = 8$.

To zdanie również składa się z funktora „ponieważ” i jego dwóch argumentów: „Otello jest nieszczęśliwy”, „$3 + 5 = 8$”. Również w tym wypadku obydwa argumenty są zdaniami prawdziwymi. Mimo to zdanie złożone jest fałszywe. Świadczy to o tym, że wartość logiczna zdania zbudowanego za pomocą funktora „ponieważ” zależy nie tylko od wartości logicznych zdań składowych. Funktor „ponieważ” nie jest więc prawdziwościowy.

Zgodnie z *zasadą ekstensjonalności* wszystkie funktory badane w klasycznym rachunku zdań muszą być prawdziwościowe. Takie funktory, jak „ponieważ”, nie są więc w tym rachunku w ogóle brane pod uwagę.

Dopuszczalność ograniczeń, które nakłada zasada ekstensjonalności, jest równie dyskusyjna, jak obowiązywanie zasady dwuwartościowości. Do obu tych zasad wypadnie nam wrócić, kiedy się pochylimy nad logikami nieklasycznymi. W każdym razie klasyczny rachunek zdań ma moc obowiązującą w takim zakresie, w jakim zachowane są te zasady.

Interpretacje. Jak już powiedzieliśmy, litery zdaniowe nie mają w pełni ustalonego znaczenia, lecz *reprezentują* dowolne prawdziwe lub fałszywe zdania. W rezultacie tego również złożone wyrażenia, zawierające litery zdaniowe, nie muszą mieć definitywnie ustalonego znaczenia. Skoro nie wiadomo, co znaczy litera „p” i litera „q”, nie wiadomo też, co znaczy wyrażenie „$p \wedge q$”. Litera „p” może reprezentować zdanie prawdziwe lub zdanie fałszywe. Z tego powodu o wyrażeniach, w których występują litery schematyczne, nie mówimy, że są one zdaniami, lecz że są *schematami* zdań lub zdaniami schematycznymi. Analogicznie mówimy o schematach wnioskowań. Dookreślenie znaczenia liter schematycznych nazywamy *interpretacją*. Schematy wyrażeń nie są po prostu prawdziwe ani fałszywe, lecz są prawdziwe lub fałszywe w poszczególnych interpretacjach. Jeśli zdecydujemy, że litera „p” reprezentuje zdanie „Ziemia jest trzecią planetą Układu Słonecznego”, to wówczas będziemy mogli stwierdzić, że wyrażenie „p” *w tej interpretacji* jest prawdą. Jeżeli zaś zdecydujemy, że litera „p” reprezentuje zdanie „Ziemia jest dyskiem spoczywającym na sześciu krokodylach”, to wolno nam będzie powiedzieć, że wyrażenie „p” *w tej interpretacji* jest fałszem.

Ponieważ w klasycznym rachunku zdań wszystkie funktory są prawdziwościowe, konstruując interpretacje możemy pozwolić sobie na pewne uproszczenie. Skoro bowiem w tym rachunku istotna jest tylko wartość logiczna zdania, zamiast przypisywać literze poszczególne zdania, możemy przypisać jej bezpośrednio wartość logiczną. Takie rozwiązanie ma wielką zaletę. Mianowicie zdań jest nieskończenie wiele, a wartości logiczne tylko dwie. Dzięki temu możemy ograniczyć się do rozpatrywania skończenie wielu interpretacji dowolnego schematu wyrażenia lub wnioskowania. Przyjmiemy zatem, że interpretacja w klasycznym rachunku zdań będzie polegała na przypisaniu wartości logicznych schematycznym literom zdaniowym.

Definicja 1 (interpretacja litery zdaniowej) *Interpretacja schematycznej litery zdaniowej polega na przyporządkowaniu tej literze dokładnie jednej wartości logicznej: prawdy lub fałszu.*

Definicja 2 (interpretacja) *Interpretacja wyrażenia (zbioru wyrażeń, schematu wnioskowania, języka) sprowadza się do interpretacji co najmniej wszystkich liter schematycznych, które występują w tym wyrażeniu (zbiorze wyrażeń, schemacie wnioskowania, języku).*

W praktyce przypisujemy zatem wartości logiczne tylko tym literom, które aktualnie rozważamy. Dla usprawnienia zapisu wprowadzimy proste skróty. Prawdę możemy oznaczać symbolem „1”, a fałsz symbolem „0”. Ponadto, zamiast mówić, że wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w interpretacji V, powiemy niekiedy:

$$V(\mathcal{A}) = \mathtt{1},$$

a, zamiast mówić, że wyrażenie $\mathcal{A}$ jest fałszywe w interpretacji V, powiemy niekiedy:

$$V(\mathcal{A}) = \mathtt{0}.$$

Możemy całkiem arbitralnie przypisywać wartości literom zdaniowym z tym zastrzeżeniem, że w danej interpretacji wszystkim egzemplarzom danej litery, nawet pojawiającej się w rozważanych wyrażeniach wielokrotnie, należy przypisać *zawsze tę samą wartość.* Natomiast wartości logiczne wyrażeń złożonych w każdej interpretacji są wyznaczone z góry przez wartości logiczne liter zdaniowych i odpowiednie charakterystyki znaczeniowe.

Wartości logiczne wyrażeń złożonych. Charakterystyka znaczenia funktora prawdziwościowego polega na opisaniu, w jaki sposób wartość logiczna wyrażenia złożonego, zbudowanego za pomocą tego funktora, zależy od wartości logicznych argumentów tego funktora.

Definicja 3 (negacja) *Wyrażenie* $\ulcorner \neg \mathcal{A} \urcorner$ *jest prawdziwe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie* $\mathcal{A}$ *jest fałszywe w tej interpretacji. Wyrażenie* $\ulcorner \neg \mathcal{A} \urcorner$ *jest fałszywe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie* $\mathcal{A}$ *jest prawdziwe w tej interpretacji.*

Zgodnie z definicją 3 negacja wyrażenia prawdziwego jest fałszem, a negacja wyrażenia fałszywego jest prawdą.

Definicja 4 (koniunkcja) *Wyrażenie* $\ulcorner \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \urcorner$ *jest prawdziwe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa wyrażenia:* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *są prawdziwe w tej interpretacji. Wyrażenie* $\ulcorner \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \urcorner$ *jest fałszywe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno z wyrażeń:* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *jest fałszywe w tej interpretacji.*

Zgodnie z definicją 4 koniunkcja jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy prawdziwe są obydwa jej czynniki. W każdym innym razie koniunkcja jest fałszywa.

Definicja 5 (alternatywa) *Wyrażenie* $\ulcorner \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \urcorner$ *jest prawdziwe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno z wyrażeń:* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *jest prawdziwe w tej interpretacji. Wyrażenie* $\ulcorner \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \urcorner$ *jest fałszywe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa wyrażenia:* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *są fałszywe w tej interpretacji.*

Zgodnie z definicją 5 alternatywa jest fałszem dokładnie wtedy, gdy fałszywe są obydwa jej składniki. W każdym innym razie alternatywa jest prawdą.

Definicja 6 (implikacja) *Wyrażenie* $\ulcorner \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \urcorner$ *jest fałszywe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie* $\mathcal{A}$ *jest prawdziwe, a wyrażenie* $\mathcal{B}$ *jest fałszywe w tej interpretacji. Wyrażenie* $\ulcorner \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \urcorner$ *jest prawdziwe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie* $\mathcal{A}$ *jest fałszywe w tej interpretacji lub wyrażenie* $\mathcal{B}$ *jest prawdziwe w tej interpretacji.*

Zgodnie z definicją 6 implikacja jest fałszywa dokładnie wtedy, gdy ma prawdziwy poprzednik, ale fałszywy następnik. W każdym innym razie implikacja jest prawdziwa. Skoro zatem fałsz implikacji wymaga równoczesnego spełnienia dwóch warunków: prawdziwego poprzednika i fałszywego następnika, to implikacja jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy co najmniej jeden z tych warunków nie jest spełniony: bądź poprzednik jest fałszywy, bądź następnik jest prawdziwy.

Definicja 7 (równoważność) *Wyrażenie* $\ulcorner \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \urcorner$ *jest prawdziwe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy w tej interpretacji wyrażenie* $\mathcal{A}$ *zgadza się z wyrażeniem* $\mathcal{B}$ *pod względem wartości logicznej. Wyrażenie* $\ulcorner \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \urcorner$ *jest fałszywe w interpretacji* V*, wtedy i tylko wtedy, gdy w tej interpretacji wyrażenie* $\mathcal{A}$ *różni się z wyrażeniem* $\mathcal{B}$ *pod względem wartości logicznej.*

Zgodnie z definicją 7 prawdą jest zarówno równoważność dwóch wyrażeń prawdziwych, jak i równoważność dwóch wyrażeń fałszywych. Natomiast równoważność, która ma jedną stronę prawdziwą, a drugą fałszywą, sama jest fałszem.

Zauważmy, że z uwagi na akceptację zasady dwuwartościowości dowolne wyrażenie jest fałszywe dokładnie wtedy, gdy nie jest prawdziwe, i odwrotnie, jest prawdziwe dokładnie wtedy, gdy nie jest prawdziwe. Ponadto każdemu rozważanemu wyrażeniu zostaje przyporządkowana dokładnie jedna z dwóch wartości logicznych. Można więc powiedzieć, że z matematycznego punktu widzenia interpretacja jest funkcją i że funkcja ta przekształca zbiór wyrażeń w dwuelementowy zbiór wartości logicznych. Przepis obliczania wartości funk-

	$\neg$
1	0
0	1

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\equiv$	1	0
1	1	0
0	0	1

Tablica 2.1: symbole klasycznego rachunku zdań

cji interpretacji dla wyrażeń złożonych klasycznego rachunku zdań można ująć w poręczne tabele. Przedstawiliśmy je na tablicy 2.1. W odniesieniu do funktora negacji w pierwszej kolumnie podano wartości argumentu funktora negacji, a w drugiej odpowiednie wartości negacji. W odniesieniu do funktorów dwuargumentowych w pierwszej kolumnie podano wartości pierwszego argumentu, a w pierwszym wierszu wartości drugiego argumentu. Wartości wyrażenia złożonego umieszczono na skrzyżowaniu właściwego wiersza i kolumny.

Algorytmiczne badanie interpretacji wyrażeń. Poręcznym sposobem rozważania interpretacji wyrażeń jest wypisywanie odpowiednich wartości logicznych pod tymi wyrażeniami. Pod literami zdaniowymi należy wypisać wartości właściwe dla rozważanej interpretacji. Obliczone na tej podstawie wartości wyrażeń złożonych należy wpisać pod funktorami głównymi tych wyrażeń, tj. pod funktorami, które wraz ze swymi argumentami tworzą te wyrażenia. Załóżmy dla przykładu, że chcemy obliczyć wartość logiczną wyrażenia „$p \rightarrow \neg q \wedge p$” w takiej interpretacji V_1, w której $V_1(p) = 1$, a $V_1(q) = 0$. Wpisujemy więc „1” pod każdym egzemplarzem litery „p”, a „0” pod każdym egzemplarzem litery „q”:

$$\begin{array}{cccccc} p & \rightarrow & \neg & q & \wedge & p. \\ 1 & & & 0 & & 1 \end{array}$$

Zauważmy, że — zgodnie z naszymi ustaleniami — pod obydwoma egzemplarzami litery „p” znajduje się ten sam znak „1”. Zatem interpretacja:

$$\begin{array}{cccccc} p & \to & \neg & q & \wedge & p \\ 1 & & & 0 & & 0 \end{array}$$

nie byłaby w ogóle możliwa, właściwie nie jest to żadna interpretacja w klasycznym rachunku zdań. Ponieważ w rozważanym wyrażeniu nie ma nawiasów, uwzględniamy kolejność działania funktorów. W pierwszym rzędzie obliczamy wartość negacji „$\neg q$”, biorąc pod uwagę wartość podstawy „q” i wpisując wynik pod funktorem „$\neg$”:

$$\begin{array}{cccccc} p & \to & \neg & q & \wedge & p. \\ 1 & & 1 & 0 & & 1 \end{array}$$

Pozostaje koniunkcja i implikacja. Pierwsza w kolejności jest koniunkcja. Z braku nawiasów pierwszym czynnikiem tej koniunkcji jest negacja „$\neg q$”, której wartość 1 odczytujemy pod jej funktorem głównym „$\neg$”, a drugim czynnikiem tej koniunkcji jest litera „p”. Obliczamy wartość na podstawie matrycy, wpisując wynik pod funktorem „$\wedge$”:

$$\begin{array}{cccccc} p & \to & \neg & q & \wedge & p. \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Ostatnim funktorem jest symbol implikacji. Jest to więc funktor główny całego rozważanego wyrażenia. Poprzednikiem tej implikacji jest litera „p”, a następnikiem tej implikacji jest cała koniunkcja „$\neg q \wedge p$”. Wartość 1 tej koniunkcji odczytujemy pod funktorem koniunkcji, a uzyskany wynik pisujemy pod funktorem implikacji:

$$\begin{array}{cccccc} p & \to & \neg & q & \wedge & p. \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Ten ostatni znak odnosi się do wartości całego wyrażenia. Zatem w rozważanej interpretacji V_1 to wyrażenie jest prawdziwe:

$$V_1(p \to \neg q \wedge p) = 1.$$

To samo wyrażenie w innej interpretacji może być fałszywe. Rozważmy interpretację V_2, taką że $V_2(p) = 1$ i $V_2(q) = 1$. Przeprowadziwszy analogiczne obliczenia, otrzymujemy wynik:

$$\begin{array}{cccccc} p & \to & \neg & q & \wedge & p. \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Dochodzimy tym samym do wniosku, że w interpretacji V_2 rozważane wyrażenie jest fałszywe:

$$V_2(p \to \neg q \wedge p) = \mathtt{0}.$$

Możemy też obie interpretacje rozważyć łącznie, jako kolejne wiersze, w których występują oznaczenia wartości logicznych. W naszym przykładzie otrzymalibyćmy wówczas tabelę:

p	$\to$	$\neg$	q	$\wedge$	p,
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1

w której pierwszy wiersz odpowiada interpretacji V_1, a drugi wiersz odpowiada interpretacji V_2. Wartość logiczną całego wyrażenia w danej interpretacji znajdujemy zawsze pod funktorem głównym tego wyrażenia. Wypisując wartości pod literami zdaniowymi, należy pamiętać tylko o jednorodności interpretacji: jeśli jakaś litera pojawia się więcej niż raz, we wszystkich miejscach swego wystąpienia musi mieć tę samą wartość logiczną. Obliczając wartości wyrażeń złożonych, należy zachować kolejność wyznaczoną przez nawiasy, a w razie braku nawiasów kolejność wyznaczoną przez umowę o kolejności działania funktorów.

Dzięki temu, że liczba liter zdaniowych występujących w dowolnym wyrażeniu jest skończona i liczba wartości logicznych jest skończona, każde wyrażenie ma skończenie wiele różnych interpretacji. Można więc stosunowo łatwo rozpatrzyć wszystkie interpretacje danego wyrażenia, a nawet dowolnego skończonego zbioru wyrażeń. Jeśli w wyrażeniu występuje n różnych liter zdaniowych, to dla tego wyrażenia można określić

$$2^n$$

różnych interpretacji. Różne egzemplarze tej samej litery liczymy przy tym jako jedną literę. Zatem dla wyrażenia, w którym występuje jedna litera zdaniowa, można określić dwie różne interpretacje. W jednej z nich dana litera jest prawdą, a w drugiej fałszem. Dla wyrażenia, w którym występują dwie różne litery zdaniowe, można określić cztery różne interpretacje. Dla wyrażenia, w którym występują trzy różne litery zdaniowe, można określić osiem różnych interpretacji itd.

Istnieje prosty algorytm określania interpretacji, o których mówimy. Pod pierwszą literą danego wyrażenia wypisujemy w 2^n wierszach na przemian znaki „1” i „0”. Pod drugą literą wypisujemy na przemian po dwa znaki „1” i dwa znaki „0”, pod trzecią literą po cztery znaki „1” i cztery znaki „0” itd. Ogólnie pod $k+1$ literą zdaniową wypisujemy po 2^k znaków „1" i 2^k znaków „0", aż do wypełnienia 2^n wierszy. Pod ostatnią, n-tą literą zdaniową wypisujemy 2^{n-1} znaków „1", a następnie 2^{n-1} znaków „0". W ten sposób mamy gwarancję uwzględnienia wszystkich interpretacji danego wyrażenia.

W rozważanym dotąd przykładzie mamy dwie różne litery zdaniowe: „p" i „q". Można więc określić 4 różne interpretacje tego wyrażenia:

p	$\rightarrow$	$\neg$	q	$\wedge$	$p.$
1			1		
0			1		
1			0		
0			0		

Pod pierwszą literą wypisaliśmy — zgodnie z algorytmem — na przemian po jednym, a pod drugą po dwa znaki „1" i „0". Ponieważ interpretacje muszą być jednorodne, pod drugim egzemplarzem litery „p" uzupełniamy wartości w tym samym układzie, co pod pierwszym egzemplarzem tej litery:

p	$\rightarrow$	$\neg$	q	$\wedge$	$p.$
1			1		1
0			1		0
1			0		1
0			0		0

Następnie wykonujemy obliczenia dla wszystkich interpretacji, uwzględniając nawiasy i kolejność działania funktorów. Z braku nawiasów zaczynamy od obliczenia wartości wyrażenia „$\neg q$", przyjmując za argumenty wartości wyrażenia „q":

p	$\rightarrow$	$\neg$	q	$\wedge$	$p.$
1		0	1		1
0		0	1		0
1		1	0		1
0		1	0		0

W dalszym ciągu obliczamy wartości wyrażenia „$\neg q \wedge p$", przyjmując za pierwszy argument wartości wyrażenia „$\neg q$", a za drugi wartości wyrażenia „p":

p	$\rightarrow$	$\neg$	q	$\wedge$	$p.$
1		0	1	0	1
0		0	1	0	0
1		1	0	1	1
0		1	0	0	0

Pozostaje obliczenie wartości całej implikacji. Umieszczamy je w odpowiednich wierszach pod funktorem głównym:

p	$\rightarrow$	$\neg$	q	$\wedge$	$p.$
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
	$*$				

Nasze wyrażenie ma cztery różne interpretacje. W jednej interpretacji jest fałszywe, a w trzech jest prawdziwe. Każdy wiersz odpowiada jednej interpretacji. Interpretacje odczytujemy pod literami zdaniowymi. Rozważane wyrażenie to jest fałszywe w interpretacji $V(p) = 1$, $V(q) = 1$, a w pozostałych interpretacjach jest prawdziwe. Wartość logiczną całego wyrażenia w danej interpretacji odczytujemy zawsze w ostatniej kolumnie obliczeń, w kolumnie pod głównym funktorem. W naszym przykładzie zaznaczyliśmy tę kolumnę asteryskiem.

Definicja wynikania logicznego. Cała logika, od Arystotelesa po czasy współczesne, we wszystkich swych klasycznych i nieklasycznych postaciach, opiera się na pewnym fundamentalnym założeniu. Zgodnie z tym założeniem tak nieuchwytny twór jak konieczny związek wynikania logicznego, sprzeczności i podobne związki dają się sprowadzić do badania interpretacji wyrażeń. Trudno przecenić wagę tego założenia, ponieważ badaniu interpretacji można nadać postać zmatematyzowanych obliczeń, postać rachunku. Natomiast konieczne związki wynikania same w sobie nie poddają się takim metodom. Podamy więc fundamentalną dla całej logiki definicję wynikania jako formalnej zależności między interpretacjami. Liczba $n \geqslant 0$ będzie tu dowolną liczbą naturalną.

Definicja 8 (wynikanie logiczne) *Wyrażenie $\mathcal{B}$ wynika logicznie z wyrażeń: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{B}$ jest prawdziwe w każdej takiej interpretacji, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$.*

Zauważmy, że mocą tej definicji zamiast nieuchwytnego stwierdzenia, że nie jest możliwa prawdziwość przesłanek przy jednoczesnym fałszu wniosku, mówimy, że nie istnieje odnośna interpretacja. Czy jest to uprawniona redukcja? Oto najważniejszy filozoficzny problem logiki. Na przykład wyrażenie „q" wynika logicznie z wyrażeń „$p \rightarrow q$" i „p". Załóżmy bowiem, że $V(p \rightarrow q) = 1$, $V(p) = 1$, ale $V(q) = 0$ dla pewnej interpretacji V. Skoro $V(p) = 1$ i

$V(q) = 0$, musi być tak, że $V(p \to q) = 0$, ale to jest sprzeczne z założeniem. Natomiast wyrażenie „p” nie wynika logicznie z wyrażeń „$p \to q$” i „q”. Albowiem istnieje taka interpretacja V, że $V(p \to q) = 1$, $V(q) = 1$, ale $V(p) = 0$, mianowicie ta właśnie interpretacja V, w której $V(p) = 0$, a $V(q) = 1$. Uwzględniając wprowadzone wcześniej symbole, napiszemy więc:

$$p \to q, p \vdash q, \qquad p \to q, q \nvdash p \tag{2.1}$$

lub też

$$q \in C(p \to q, p), \qquad p \notin C(p \to q, q). \tag{2.2}$$

Zauważmy, że — o ile nie prowadzi to do nieporozumienia — w tego typu zapisach często pozwalamy sobie na pominięcie cudzysłowu. O zachodzeniu zależności (2.1) i (2.2) możemy przekonać się algorytmicznie. Z tabeli:

p	$\to$	q	p	q
1	1	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	0	0

natychmiast odczytujemy to, że nie istnieje taka interpretacja V, że $V(p \to q) = V(p) = 1$, a $V(q) = 0$. Natomiast tabela:

p	$\to$	q	q	p	
1	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	*
1	0	0	0	1	
0	1	0	0	0	

równie szybko pokazuje, że w pewnej interpretacji V, zaznaczonej asteryskiem, $V(p \to q) = V(q) = 1$, a $V(p) = 0$. Zgodnie z przeprowadzoną analizą jest to taka interpretacja V, że $V(p) = 0$, a $V(q) = 1$.

Zdanie, które należy do metajęzyka i w którym stwierdzamy zachodzenie lub niezachodzenie związku wynikania logicznego między określonymi wyrażeniami, nazywa się *regułą inferencyjną*. Zdania (2.1) i (2.2) są przykładami reguł inferencyjnych.

Model i kontrmodel. Interpretację, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia należące do zbioru X nazywamy często *modelem semantycznym* zbioru X, a interpretację, w której co najmniej jedno z tych wyrażeń jest fałszem, nazywamy *kontrmodelem* zbioru X. Analogicznie mówimy o modelu i kontrmodelu pojedyńczego wyrażenia. Interpretację, w której prawdziwe są wszystkie przesłanki pewnego wnioskowania, a konkluzja tego wnioskowania jest fałszywa, nazywamy *kontrmodelem* tego wnioskowania, a pozostałe interpretacje jego modelami. Analogicznie o modelu i kontrmodelu mówimy w odniesieniu do reguły inferencyjnej i każdego domniemanego przypadku wynikania logicznego.

Matryca klasyczna. W definicji 8 istotną rolę odgrywa jedna z wartości logicznych: prawda. Wynikanie jest to taki związek, który zapewnia zachowanie lub też dziedziczenie prawdy między przesłankami a wnioskiem. Charakteryzując rachunek logiczny, określamy często wartość, która pełni taką funkcję, mianem *wartości wyróżnionej*. Powiemy więc, że klasyczny rachunek logiczny opiera się m.in. na założeniu o istnieniu dwóch wartości logicznych, wśród których prawda jest wyróżniona. Nasz opis związków logicznych klasycznego rachunku zdań składa się z następujących komponentów:

- zbiór wartości logicznych: $\{\mathtt{1}, \mathtt{0}\}$,
- zbiór wartości wyróżnionych: $\{\mathtt{1}\}$,
- działania w zbiorze wartości (tablica 2.1).

Opis ten stanowi *matrycę klasyczną*. Ogólnie *matrycą logiczną* lub charakterystyką matrycową nazywa się ujęcie rachunku logicznego przez wskazanie zbioru wartości, działań, które są określone w tym zbiorze i które odpowiadają symbolom logicznym , oraz przez wyróżnienie wartości dziedziczonych (zachowywanych) przez wynikanie logiczne. Zbiór wszystkich wartości rozpatrywanych w danej matrycy nazywa się *uniwersum* tej matrycy. Teoria matryc logicznych jest ważnym, wysoce zmatematyzowanym działem logiki wyższej.

Zbiory sprzeczne. Pojęcie sprzeczności, z którym zetknęliśmy się już w rozdziale 1, należy do głównych pojęć logiki i jest ściśle związane z pojęciem wynikania. Zbiór wyrażeń X jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy wynikają z niego dwa wyrażenia przeczące sobie dokładnie nawzajem, precyzyjnie mówiąc,

Definicja 9 (sprzeczność) *zbiór X wyrażeń jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie wyrażenie $\mathcal{A}$, że $\mathcal{A} \in C(X)$ oraz $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner \in C(X)$.*

Zatem zbiór przesłanek wnioskowania jest sprzeczny, jeśli z przesłanek tych wynikają przeczące sobie nawzajem konkluzje. Analogicznie będziemy mówili o sprzeczności teorii. Najprostsze są te przykłady, w których sprzeczność występuje wśród presłanek jawnie. Dość oczywiste jest choćby to, że

$$p, \neg p \vdash p, \qquad p, \neg p \vdash \neg p,$$

a więc, zgodnie z definicją 9 mamy tu do czynienia ze sprzecznym zbiorem przesłanek. Jak jednak wspomnieliśmy w rozdziale 1, sprzeczności bywają zwykle ukryte, nieraz całkiem złośliwie. Przyjrzyjmy się na razie stosunkowo prostemu przykładowi. Otóż zbiór wyrażeń:

$$p \equiv q, \neg p, q \tag{2.3}$$

jest sprzeczny. Żeby się o tym przekonać, przypuśćmy, że w pewnej interpretacji V wszystkie te wyrażenia są prawdziwe. Skoro $V(p \equiv q) = \mathtt{1}$, to $V(p) = V(q)$. Wiadomo zaś skądinąd, że $V(q) = \mathtt{1}$. Wobec tego również $V(p) = \mathtt{1}$. Ustaliliśmy więc, że

$$p \equiv q, \neg p, q \vdash p.$$

Z drugiej strony, skoro wszystkie przesłanki są prawdziwe w interpretacji V, to wśród nich prawdziwa jest druga przesłanka, a zatem

$$p \equiv q, \neg p, q \vdash \neg p,$$

wykluczone jest bowiem, żeby wyrażenie jakiekolwiek wyrażenie było, a zarazem nie było prawdziwe w tej samej interpretaji. Biorąc pod uwagę definicję (8) oraz charakterystykę funktora negacji, łatwo dojść do wniosku, że

Twierdzenie 10 *zbiór X jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje model semantyczny tego zbioru X.*

Rzeczywiście, nie istnieje taka interpretacja, w której wszystkie wyrażenia (2.3) byłyby prawdziwe. Jak bowiem powiedzieliśmy, jeśli $V(p \equiv q) = \mathtt{1}$, to $V(p) = V(q)$. Ponieważ jednak z definicji $V(p) \neq V(\neg p)$, to również $V(q) \neq V(\neg p)$. Zatem, rzeczywiście zbiór wyrażeń (2.3) nie ma modelu. Co więcej, tak musi być zawsze, to znaczy, twierdzenie 10 jest prawdziwe. Aby się o tym przekonać, przypuśćmy, że nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia należące do jakiegoś zbioru X. Zatem, tym bardziej, nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia zbioru X, ale nie wyrażenie $\mathcal{A}$, ani interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia ze zbioru X, ale nie wyrażenie $\ulcorner \neg \mathcal{A} \urcorner$, przy czym $\mathcal{A}$ może być dowolnym wyrażeniem. Wobec tego

$$X \vdash \mathcal{A}, \qquad X \vdash \neg \mathcal{A}.$$

Czyli w świetle definicji 9 zbiór X jest sprzeczny. Z drugiej strony załóżmy, że zbiór X wyrażeń jest w takim sensie sprzeczny i że jakieś wyrażenia $\mathcal{A}$ oraz $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ są jego konsekwencjami. Załóżmy też, że w interpretacji V wszystkie wyrażenia zbioru X są prawdą. Zatem zarówno $\mathcal{A}$, jak $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$, jest prawdziwe w tej interpretacji, co jest niemożliwe. Zatem nie istnieje interpretacja, w której byłyby prawdziwe wszystkie wyrażenia składające się na zbiór sprzeczny. Za pomocą tabeli:

p	$\equiv$	q	$\neg$	p	q
1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0

możemy się przekonać, że rozważany przez nas przykładowy zbiór wyrażeń (2.3) faktycznie nie ma modelu semantycznego, nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe byłyby wszystkie należące do tego zbioru wyrażenia. Z twierdzeniem 10 wiąże się kolejna własność zbiorów sprzecznych. Mianowicie własność, którą opsuje następujące twierdzenie, zwane *Zasadą Dunsa Szkota.*

Twierdzenie 11 (Zasada Dunsa Szkota) *Każde wyrażenie wynika logicznie ze sprzecznego zbioru wyrażeń.*

Aby tego dowieść, załóżmy, że zbiór X jest sprzeczny. Zgodnie z twierdzeniem 10 nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia wchodzące w skład tego zbioru. Tym bardziej, dla całkiem dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$, nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia ze zbioru X, ale nie wyrażenie $\mathcal{A}$. Zatem wyrażenie $\mathcal{A}$ wynika ze zbioru X.

Tautologia i antylogia. Niekiedy do powstania sprzeczności wystarczy jedno wyrażenie. Takie wyrażenie nazywa się antylogią, a jego przeciwieństwo tautologią.

Definicja 12 (tautologia i antylogia) *Tautologia jest to wyrażenie prawdziwe w każdej interpretacji. Antylogia zaś jest to wyrażenie, które nie jest prawdziwe w żadnej interpretacji.*

Przykładem tautologii klasycznego rachunku zdań jest wyrażenie „$p \vee \neg p$”, a przykładem antylogii tego rachunku jest wyrażenie „$p \wedge \neg p$”. Można się o tym przeknać, spoglądając na tabele:

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0
	$*$		

p	$\wedge$	$\neg$	p
1	0	0	1
0	0	1	0
	$*$		

pokazujące, że pierwsze z wyrażeń jest prawdziwe w każdej interpretacji, a drugie w żadnej (właściwe kolumny zaznaczyliśmy znowu asteryskiem). Antylogii dotyczy twierdzenie 11, zaś tautologii dotyczy następujące twierdzenie, będące odpowiednikiem twierdzenia 11.

Twierdzenie 13 *Tautologia wynika logicznie z dowolnego zbioru wyrażeń, włączając w to zbiór pusty.*

Dowód twierdzenia 13 jest łatwy i analogiczny do dowodu twierdzenia 13.

Zbiory równoważne. Ważną rolę odgrywa jeszcze pojęcie równoważności zbiorów wyrażeń. Podobnie, jak pojęcie sprzeczności, jest ono ściśle związane z pojęciem wynikania.

Definicja 14 (równoważność) *Zbiory: X i Y wyrażeń są sobie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same konsekwencje logiczne.*

Posługując się symbolem „$\sim$" jako znakiem równoważności zbiorów, można definicję 14 zapisać krótko:

$$X \sim Y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } C(X) = C(Y). \tag{2.4}$$

Dwa zbiory przesłanek są więc równoważne, jeśli wynikają z nich logicznie dokładnie te same wnioski. Również pojęcie równoważności daje się scharakteryzować za pomocą pojęcia interpretacji.

Twierdzenie 15 *Zbiory: X i Y wyrażeń są sobie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same modele semantyczne.*

Aby dowieść twierdzenia 15, wystarczy skupić uwagę na definicji wynikania logicznego i definicji zbiorów równoważnych. Dla przykładu przekonamy się o równoważności zbiorów:

$$\{\neg(p \vee q)\} \sim \{\neg p, \neg q\}.$$

Tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumienia opuszczamy zwykle nawias klamrowy, pisząc:

$$\neg(p \vee q) \sim \neg p, \neg q.$$

Aby się przekonać, że tak właśnie jest, spójrzmy na tabelę:

$\neg$	(	p	$\vee$	q	)	$\neg$	p	$\neg$	q	
0		1	1	1		0	1	0	1	
0		0	1	1		1	0	0	1	
0		1	1	0		0	1	1	0	
1		0	0	0		1	0	1	0	*

pokazującą, że jest dokładnie jedna interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia pierwszego zbioru i wszystkie wyrażenia drugiego. Tę interpretację zaznaczyliśmy asteryskiem. W pozostałych interpretacjach w każdym ze zbiorów jest co najmniej jedno fałszywe wyrażenie. Wobec tego interesujące nas zbiory faktycznie mają dokładnie te same modele semantyczne. Widać więc, że z obu zbiorów wynikają dokładnie te same wyrażenia — wyrażenia prawdziwe w interpretacji wskazanej za pomocą asterysku.

W praktyce, aby przekonać się o równoważności zbiorów wyrażeń, często wykazuje się, że wszystkie elementy zbioru X wynikają logicznie ze zbioru Y i odwrotnie, wszystkie elementy zbioru Y wynikają ze zbioru X.

Pojęcia sprzeczności i równoważności mają swoje odpowiedniki związane z pojęciem wynikania entymematycznego. Mówimy wówczas o sprzeczności lub równoważności *na gruncie* zbioru wyrażeń lub teorii.

Formalizacja. Aby zastosować klasyczny rachunek zdań do badania wnioskowań, staramy się oddać istotne cechy, strukturę badanego wnioskowania w języku klasycznego rachunku zdań. W rezultacie uzyskujemy *formalny schemat* badanych wyrażeń lub wnioskowań, zbudowane ze znaków języka klasycznego rachunku zdań. Budowa schematu formalnego przebiega w pięciu krokach:

- zidentyfikować w wyjściowym tekście funktory zdaniowe,
- przyporządkować im symbole klasycznego rachunku zdań,
- zidentyfikować w wyjściowym tekście zdania proste, uwzględniając ich znaczenie, a nie zewnętrzną budowę,
- przyporządkować jednoznacznie zdaniom prostym reprezentujące je litery zdaniowe,
- używając w razie potrzeby nawiasów, odtworzyć w języku klasycznego rachunku zdań strukturę wyjściowego tekstu.

Proces tworzenia schematu formalnego nazywa się *formalizacją*. Proces formalizacji, czyli tworzenia schematu formalnego najłatwiej można uchwycić na przykładzie. Zbudujemy więc schemat formalny prostego wnioskowania:

jeśli teoria Newtona jest poprawna, nie ma prędkości absolutnych,
istnieją prędkości bezwzględne,

---

teoria Newtona nie jest poprawna.

W pierwszym kroku identyfikujemy funktory zdaniowe. W pierwszej przesłance mamy zwrot „jeśli” oraz zwrot „nie”. Ponadto w kokluzji występuje zwrot „nie”. W drugim krotku staramy się przełożyć zidentyfikowane funktory na funktory klasycznego rachunku zdań. Będą to odpowiednio symbole „$\rightarrow$” i „$\neg$”. W trzecim kroku identyfikujemy zdania proste. Ponieważ mamy uwzględniać znaczenie, a nie zewnętrzną budowę wyrażeń, potraktujemy zdania „są prędkości absolutne”, „istnieją prędkości bezwzględne” jako jedno zdanie. Mamy więc do czynienia z dwoma zdaniami prostymi: „teoria Newtona jest poprawna”, „są prędkości absolutne”. W czwartym kroku ustalamy, że zdanie „teoria Newtona jest poprawna” będzie reprezentowane przez literę „p”, a zdanie „są prędkości bezwzględne” będzie reprezentowane przez literę „q”. W piątym kroku odtwarzamy strukturę wyjściowego wnioskowania:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \neg q, \\ q, \\ \hline \neg p. \end{array}$$

Uzyskaliśmy w ten sposób schemat formalny badanego wnioskowania. Poprawność tego schematu będziemy mogli teraz zbadać, stosując metody klasycznego rachunku zdań. Uzyskany wynik przeniesiemy później na wyjściowe wnioskowanie. Jeśli udało się nam trafnie oddać istotę wyjściowego wnioskowania, uwzględniając wszystkie istotne elementy jego struktury logicznej, i jeśli potem prawidłowo zbadamy uzyskany schemat formalny, rzeczywiście otrzymamy w rezultacie właściwą ocenę poprawności badanego wnioskowania.

Aby zagwarantować sobie klarowność przykładu, wybraliśmy do sformalizowania bardzo proste wnioskowanie. W rzeczywistości proces ten jest często najeżony trudnościami. Wspominaliśmy już, że trudności pojawiają się często już na etapie nadawania wnioskowaniom standardowej postaci, wyznaczania przesłanek i wniosku, znajdowania ewentualnych ukrytych założeń, a nawet samej oceny tego, czy w ogóle mamy do czynienia z wnioskowaniem. Trudności nie kończą się nawet po szczęśliwej standaryzacji wnioskowania.

Dwa pierwsze kroki formalizacji wymagają uwagi z powodu bogactwa i częstej wieloznaczności naturalnych spójników, którym mają odpowiadać symbole logiczne. Weźmy za przykład spójnik „i”. Często występuje on rzeczywiście w roli funktora prawdziwościowego. Mówiąc, na przykład, że

Tristan i Marek kochają Izoldę,

mamy zapewne na myśli to, że

Tristan kocha Izoldę i Marek kocha Izoldę, przy czym znak „i" języka naturalnego ma tutaj to samo znaczenie, co znak „$\wedge$" języka klasycznego rachunku zdań. Jeśli jednak powiemy, że

Izolda i Marek są małżeństwem,

to sprawa się komplikuje. Nie chodzi nam już zwykle o to, że

Izolda jest małżeństwem i Marek jest małżeństwem.

Znak „i" służy tu raczej do zbudowania jakiegoś zbiorowego podmiotu zdania. Stopień komplikacji wzrasta, gdy zaczynamy rozważać spójniki znaczeniowo coraz odleglejsze od prawdziwościowych. Musimy wówczas podejmować decyzje, w jakim stopniu istotne cechy badanego tekstu dają się sformalizować w klasycznym rachunku zdań. W pewnym momencie może powstać konieczność odwołania się do innego rachunku logicznego.

Wykonując krok trzeci i czwarty, narażamy się na nie mniejsze niebezpieczeństwa. Zwróciliśmy już dwukrotnie uwagę na to, że poszczególne litery zdaniowe powinny jednoznacznie reprezentować zdania proste z uwagi na znaczenie, a nie na zewnętrzną budowę. Wymaga to dokładnego rozważenia znaczenia analizowanych zdań. Niekiedy potrzebna jest tu wiedza materialna z zakresu tej gałęzi wiedzy, do której należy badany tekst. Trzeba zawsze uwzględnić to, że schematyczne litery zdaniowe są od siebie nawzajem całkowicie niezależne. Wartość logiczna przypisana literze „p" nie ma żadnego wpływu na wartości logiczne, które wolno przypisać literze „q". W wypadku zdań tak być nie musi. Jeśli przykładowo we wnioskowaniu występują dwa zdania proste: „Dobrawa była Matką Bolesława Chrobrego", „Dobrawa była babką Mieszka II", to dla każdego powinno być jasne, że te zdania zgadzają się pod względem wartości logicznej. Bądź obydwa są prawdziwe, bądź obydwa są fałszywe. Formalizując je, musimy zdecydować, czy ta zależność jest istotna dla wnioskowania, czy nie. Jeśli tak, musimy ją w jakiś sposób oddać w tworzonym schemacie formalnym. Możemy, na przykład, potraktować badane wnioskowanie jako entymemat o ukrytym założeniu „Dobrawa była matką Bolesława Chrobrego wtedy i tylko wtedy, gdy Dobrawa była babką Mieszka II".

Ostatni krok formalizacji może okazać się najtrudniejszy. Używając nawiasów, nadajemy bowiem schematom formalnym postać całkiem jednoznaczną. Wyjściowe wypowiedzi mogą natomiast być rozumiane na wiele sposobów. Na przykład, formalizując zdanie „Fryderyk uzyska dyplom i zdobędzie wykształcenie, jeśli będzie rzetelnie studiował", musimy zdacydować, czy chcemy stwierdzić, że Fryderyk bezwarunkowo uzyska dyplom, natomiast wykształcenie zdobędzie pod warunkiem rzetelnego studiowania, czy też zarówno uzyskanie dyplomu, jak i z obycie wykształcenia jest warunkowane rzetelnym studiowaniem. Jeśli więc zdanie „Fryderyk uzyska dyplom” jest reprezentowane przez literę „p”, zdanie „Fryderyk zdobędzie wykształcenie” przez literę „q”, a zdanie „Fryderyk będzie rzetelnie studiował” przez literę „r”, to wyjściowe zdanie może mieć schemat „$p \wedge (r \rightarrow q)$” lub „$r \rightarrow (p \wedge q)$”. Wybór któregoś z nich może mieć decydujący wpływ na ocenę poprawności wnioskowania. Na przykład w interpretacji $V(p) = 0$, $V(q) = 0$, $V(r) = 0$ pierwszy schemat jest zdaniem fałszywym, a drugi prawdziwym.

Widać, że na wszystkich etapach formalizowania badanych wypowiedzi powinno się zachować wielką czujność. W nagrodę otrzymujemy precyzyjny schemat formalny, nadający się do matematycznych badań, których wynik wolno nam będzie potem przenieść na wyjściową wypowiedź.

2.2 Technika drzew analitycznych

Zapoznamy się z dość prostą, ale całkowicie czyniącą zadość naszym potrzebom, procedurą rachunkową, zwaną metodą *drzew analitycznych*. Jest to w gruncie rzeczy rachunkowa metoda przeszukiwania zakresu dostępnych interpretacji zadanego, skończonego zbioru wyrażeń. Metoda ta jest znacznie wydajniejsza niż badanie każdej, poszczególnej interpretacji, i — jak się przekonamy — ma szersze zastosowanie.

Drzewa analityczne są szczególnego rodzaju grafami skierowanymi, to znaczy, strukturami złożonymi z punktów, między którymi zachodzą pewne relacje, a ponadto są jeszcze określone pewne kierunki. Spośród wszystkich drzew znanych w matematyce drzewa analityczne wyróżniają się tym, że ich gałęzie składają się z wyrażeń. Budową drzewa z wyrażeń rządzą specjalne reguły. Zanim omówimy zasady budowania i interpretacji drzewa analitycznego, rozważymy intuicyjnie pewien prosty przykład.

Rozważmy, czy z wyrażeń: „$(p \vee q)$” oraz „$\neg(p \wedge \neg q)$” wynika logicznie wyrażenie „q”. Musimy zatem rozważyć, czy istnieje interpretacja, w której dwa pierwsze wyrażenia są prawdziwe, a ostatnie jest fałszywe. Zamiast o fałszu wyrażenia „q” będziemy mówić o prawdziwości negacji „$\neg q$” tego wyrażenia. Zapytamy więc, czy istnieje interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie następujące wyrażenia: „$(p \vee q)$”, „$\neg(p \wedge \neg q)$” i „$\neg q$”. Wypiszemy je w jednej kolumnie.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg(p \wedge \neg q) \\ \neg q \end{array}$$

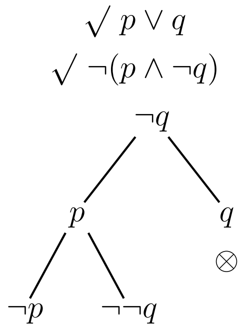
Pierwsze wyrażenie jest alternatywą. Wiemy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym prawdziwości alternatywy jest prawdziwość co najmniej jednego z jej składników, aczkolwiek nie wiemy, który ze składników jest prawdziwy. Rozważymy zatem dwa przypadki: w pierwszym prawdziwe jest co najmniej wyrażenie „p”, a w drugim co najmniej wyrażenie „q”. Zaznaczmy, że po rozgałęzieniu drzewa każda gałąź będzie reprezentowała jedną z opisanych możliwości, a część drzewa ponad rozgałęzieniem wspólna obu gałęziom. Na to, że wykorzystaliśmy już informację, zawartą w pierwszym z rozważanych wyrażeń, będzie wskazywał znak $\surd$. Wyrażenia oznaczone w ten sposób nazwiemy *martwymi*, a pozostałe wyrażenia nazwiemy *żywymi*.

$$
\begin{array}{l}
\surd\ p \vee q \\
\neg(p \wedge \neg q) \\
\quad\ \ \neg q \\
\quad\ \ / \ \ \backslash \\
\quad p \qquad q
\end{array}
$$

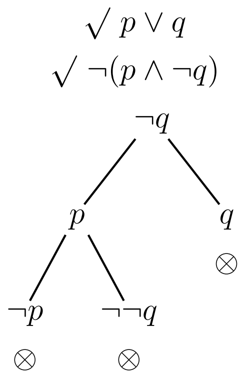
Zauważmy, że drugi rozważany przypadek — reprezentowany przez prawą gałąź — nie odpowiada żadnej interpretacji. Wymaga bowiem tego, by prawdziwe były zarazem dwa wyrażenia bezpośrednio sprzeczne: „q” oraz „$\neg q$”, które znalazły się na jednej gałęzi. Ze względu na ustalony sposób rozumienia negacji takiej interpretacji nie ma. Jest przy tym bez znaczenia to, że jedno z tych wyrażeń sprzecznych występuje przed rozgałęzieniem, a drugie po nim, skoro umówiliśmy się traktować wyrażenia znad rozgałęzienia tak, jakby występowały na każdej odnośnej gałęzi. Sprzeczność zaznaczymy znakiem $\otimes$. Gałąź, na której pojawia się ten znak nazwiemy *zamkniętą*, nie będziemy wykonywać na niej żadnych operacji, nie będziemy w ogóle odtąd brać jej pod uwagę.

$$
\begin{array}{l}
\surd\ p \vee q \\
\neg(p \wedge \neg q) \\
\quad\ \ \neg q \\
\quad\ \ / \ \ \backslash \\
\quad p \qquad q \\
\qquad\quad\ \otimes
\end{array}
$$

Na lewej gałęzi nie dostrzegamy na razie sprzeczności. Jednak nie wszystkie wyrażenia zostały jeszcze wykorzystane. Weźmy pod uwagę negację koniunkcji. Jest to prawda w tych interpretacjach, w których występująca w podstawie koniunkcja jest fałszywa. Koniunkcja zaś jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa jej czynniki są prawdziwe. Zatem koniunkcja jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden jej czynnik jest fałszywy. Wobec tego wyrażenie „$\neg(p \wedge q)$” jest prawdziwe dokładnie w tych interpretacjach, w których co najmniej jedno z wyrażeń: „$\neg p$”, „$\neg\neg q$”. Zaznaczamy to przez kolejne rozgałęzienie na lewej gałęzi, wpisując też znak $\surd$ przy uśmierconym, to jest wykorzystanym, wyrażeniu.



Gdyby prawa gałąź nie została wcześniej zamknięta, ją również musielibyśmy w ten sposób rozgałęzić, ponieważ analizowana negacja koniunkcji występuje na wszystkich gałęziach. jednak gałąź zamknięta tak czy inaczej zawiera sprzeczność i nic już tego nie zmieni. Dlatego — jak powiedzieliśmy, nie wykonujemy na niej żadnych dalszych operacji. Rozważmy dwie gałęzie, które nie są jeszcze zamknięte. Na pierwszej, licząc od lewa, występują już dwa wyrażenia sprzeczne: „p” oraz „$\neg p$”. Podobnie jest na drugiej gałęzi, mamy tu dwa wyrażenia sprzeczne: „$\neg q$” oraz „$\neg\neg q$”. Zatem obie te gałęzie zostają zamknięte, co zaznaczymy znowu za pomocą znaku $\surd$.



Wszystkie gałęzie drzewa są zamknięte. Ten wynik interpretujemy w następujący sposób: nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe byłyby wszystkie trzy wyrażenia wypisane na początku tworzenia drzewa. Wobec tego zachodzi wynikanie logiczne:

$$(p \vee q), \neg(p \wedge \neg q) \vdash q,$$

o które pytaliśmy na początku. Gdyby zaś *co najmniej jedna* gałąź nie uległa zamknięciu po wykorzystaniu wszystkich informacji, zawartych na drzewie, uznalibyśmy, że rozważane wynikanie nie zachodzi. Z tej gałęzi odczytalibyśmy stanowiącą kontrprzykład interpretację.

Metoda drzew analitycznych polega na ustaleniu takich reguł budowania drzew, żeby można było prowadzić podobne rozważania bez zastanawiania się nad warunkami prawdziwości wyrażeń, nad ich znaczeniem — podobnie jak czynimy np. w wypadku mnożenia pisemnego. Dzięki temu, że język klasycznego rachunku zdań jest językiem sformalizowanym, rozważania te można prowadzić, odwołując się wyłącznie do zewnętrznego kształtu napisów. Jest to istota rachunku logicznego, istota metody liczenia w logice. Obecnie omówimy w ogólności metody budowania drzew analitycznych w języku klasycznego rachunku zdań.

Aby scharakteryzować strukturę drzewa analitycznego, trzeba omówić jego składniki, relacje i kierunki obowiązujące na drzewie.

Składniki drzewa. Drzewo analityczne zaczyna się od *korzenia* i kończy się *liśćmi.* Od korzenia do każdego liścia biegnie *gałąź.* Każde drzewo ma dokładnie jeden korzeń i co najmniej jeden liść, drzewo może mieć więcej, dowolnie, byle skończenie wiele liści. Drzewo ma dokładnie tyle gałęzi, ile liści, ponieważ do każdego liścia dochodzi dokładnie jedna gałąź.

Kierunki. Punkty na drzewie mogą leżeć *wyżej* lub *niżej.* Mówimy, że punkt x leży niżej niż punkt y (punkt x leży poniżej punktu y) wtedy i tylko wtedy, gdy z punktu y do punktu x można przejść, poruszając się *wyłącznie* od korzenia do pewnego liścia (nigdy nie zbliżając się do korzenia). Korzeń zawsze leży najwyżej, a każdy liść leży zawsze najniżej (żaden liść nie leży niżej niż inne liście). Jeżeli punkt x leży niżej niż punkt y, to punkt y leży wyżej niż punkt x (powyżej punktu x).

Budowa gałęzi. Gałąź jest to część drzewa zaczynająca się w korzeniu, a kończąca się w pewnym liściu, i biegnąca nieprzerwanie zawsze tylko w dół — od punktów leżących coraz wyżej do punktów leżących coraz niżej. Punkt, do którego dochodzi z góry jedna gałąź, a z którego wychodzą w dół dwie gałęzie, nazywa się *rozgałęzieniem.* Część drzewa, zaczynająca się w korzeniu i biegnąca aż do pierwszego rozgałęzienia, nazywa się *pniem.* Jeżeli drzewo nie ma rozgałęzień, to ma ono dokładnie jedną gałąź i dokładnie jeden liść, i całe jest swoim pniem.

Wyrażenia na drzewie. Gałęzie drzewa analitycznego składają się z wyrażeń. Wyrażenia, które znajdują się powyżej pewnego rozgałęzienia, znajdują się na wszystkich gałęziach kończących się poniżej tego rozgałęzienia. W konsekwencji wyrażenia znajdujące się na pniu, znajdują się na każdej gałęzi.

Prawda i fałsz. To, że pewne wyrażenie $\mathcal{A}$ leży na danej gałęzi, należy rozumieć w ten sposób, że $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w interpretacji, której ta gałąź ma odpowiadać, o ile taka interpretacja istnieje. Aby zaznaczyć, że wyrażenie

$\mathcal{A}$ jest fałszywe w takiej interpretacji, należy umieścić na odpowiedniej gałęzi wyrażenie $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$.

Otwarcie drzewa. Otwarcie drzewa polega na wypisaniu w kolumnie pewnych wyrażeń, które stanowią *korzeń* drzewa (korzeń jest tutaj częścią pnia i każdej gałęzi). Tę czynność rozumiemy jako zadanie pytania, czy istnieje interpretacja, w której wszystkie występujące w korzeniu wyrażenia są prawdziwe.

Rozwój drzewa. Budując drzewo, stosujemy do znajdujących się na nim wyrażeń specjalne *reguły analityczne*. Jeżeli do pewnego wyrażenia zastosujemy jakąś regułę analityczną, wyrażenie to oznaczamy znakiem $\surd$. Takie wyrażenie uważamy za *martwe* i pomijamy je w dalszym budowaniu drzewa. Wyrażenia, do których nie zastosowaliśmy jeszcze żadnej reguły analitycznej, nazywamy *żywymi*. Pomijanie wyrażeń martwych jest usprawiedliwione tym, że zawarta w nich informacja została już w pełni wykorzystana przez zastosowanie określonej reguły analitycznej. Reguły analityczne dotyczą wyłącznie wyrażeń złożonych i prowadzą do rozłożenia tych wyrażeń na prostsze składniki.

Zamknięcie gałęzi lub drzewa. Gałąź jest *zamknięta* wtedy i tylko wtedy, gdy na tej gałęzi występuje zarazem pewne wyrażenie $\mathcal{A}$ oraz negacja $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ tego wyrażenia. Zatem zakładamy, że każde wyrażenie jest sprzeczne ze swoją własną negacją. Drzewo jest zamknięte wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie gałęzie tego drzewa są zamknięte. Gałęzie i drzewa, które nie są zamknięte, określamy jako *otwarte*. Zamknięcie gałęzi oznaczamy znakiem $\otimes$ w liściu.

Zakończenie gałęzi lub drzewa. Nie każda gałąź i nie każde drzewo może się zamknąć. Mówimy, że gałąź jest *zakończona* wtedy i tylko wtedy, gdy bądź gałąź ta jest zamknięta, bądź jedynymi żywymi wyrażeniami na tej gałęzi są takie wyrażenia, których nie dotyczy żadna reguła analityczna: wyrażenie proste lub negacja wyrażenia prostego. Gałąź, która jest zakończona, ale nie jest zamknięta, charakteryzuje się więc tym, że nie ma na niej żywych wyrażeń, do których można by zastosować jakąś regułę analityczną — wszelka informacja zawarta w tej gałęzi została wykorzystana. W razie potrzeby taką gałąź oznaczymy znakiem $\odot$. Drzewo jest zakończone wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie gałęzie tego drzewa są zakończone. Budując drzewo, dążymy do zakończenia wszystkich gałęzi. Dopiero zakończenie drzewa pozwala na wyciąganie z niego wniosków dotyczących zachodzenia związków logicznych.

Odczytanie gałęzi. Każda zamknięta gałąź odpowiada brakowi określonej na tej gałęzi interpretacji. Natomiast każda zakończona gałąź otwarta odpowiada istniejącej interpretacji V. Każda litera zdaniowa, która występuje na tej gałęzi, jest prawdziwa w interpretacji V, a każda litera zdaniowa, której negacja występuje na tej gałęzi, jest fałszywa w interpretacji V. Wartości logiczne pozostałych liter zdaniowych są obojętne.

Odczytanie drzewa. Po zakończeniu drzewa można je odczytać. Jeżeli drzewo jest zamknięte, to nie istnieje interpretacja, w której prwadziwe są wszystkie wyrażenia stanwiące jego korzeń. Jeżeli co najmniej jedna gałąź pozostaje otwarta, to taka interpretacja istnieje. Wszystkie wyrażenia, które stanowią korzeń takiego drzewa, są prawdziwe w każdej interpretacji, która odpowiada dowolnej otwartej (ale zakończonej) gałęzi.

Rozwijając drzewo analityczne, analizujemy występujące na tym drzewie wyrażenia. Czynność ta polega na sprowadzaniu warunków prawdziwości lub fałszywości odpowiednich wyrażeń do prawdziwości lub fałszywości wyrażeń prostszych, będących składnikami wyrażeń wyjściowych. Tym postępowaniem kierują reguły analityczne, które obecnie omówimy.

Pierwsza reguła mówi, w jaki sposób należy postąpić z podwójną negacją. Wolno po prostu opuścić dwa sąsiadujące funktory negacji.

Reguła NN:

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg\neg\mathcal{A} \\ | \\ \mathcal{A} \end{array}$$

Zatem, oznaczywszy podwójną negację znakiem $\surd$, wpisujemy na dole odpowiedniej gałęzi wyrażenie powstające z podwójnej negacji przez opuszczenie obu funktorów negacji. Tę regułę nazwiemy NN. Bardziej złożona jest sytuacja pojedyńczej negacji. Jeśli jednym funktorem negacji jest poprzedzone zdanie proste, na przykład „$\neg p$”, „$\neg q$”, to taką całość uznamy za nieanalizowalną. Żadna reguła analityczna nie będzie dityczyła takiego wyrażenia. Nie znaczy to jednak, że nie mamy nic do powiedzenia na temat wyrażeń tego typu. Jak powiedzieliśmy, obecność dowolnej negacji $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ wraz z jej podstawą $\mathcal{A}$ na pewnej gałęzi wystarczy do zamknięcia tej gałęzi. Natomiast pojedyńcze negacje wyrażeń złożonych mogą (choć nie muszą) być analizowalne, dla każdej takiej negacji sformułujemy regułę analityczną. Rozważmy najpierw koniunkcję. Prawdziwość koniunkcji zaznaczamy, wpisując tę koniunkcję na odpowiedniej gałęzi, a fałsz tej koniunkcji zaznaczamy, wpisując negację tej koniunkcji. Ustaliliśmy, że koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba jej czynniki są prawdziwe. Jeśli zatem na pewnej gałęzi występuje koniunkcja, to na tej gałęzi należy wpisać oba jej czynniki. Mówi o tym reguła K.

Reguła K:

$$\begin{array}{c} \surd\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \\ | \\ \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{array}$$

Jeśli natomiast na gałęzi pojawia się negacja koniunkcji, to musimy rozważyć, w jakich sytuacjach koniunkcja może być fałszywa. Otóż koniunkcja jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden jej czynnik jest fałszywy. Należy wówczas postąpić zgodnie z regułą NK.

Reguła NK:
$$\begin{array}{c} \surd\ \neg(\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \\ / \quad \backslash \\ \neg\mathcal{A} \qquad \neg\mathcal{B} \end{array}$$

Reguła ta nakazuje rozgałęzić drzewo. Na pierwszej gałęzi należy wpisać negację pierwszego czynniki analizowanej koniunkcji, a na drugiej gałęzi należy wpisać negację drugiego czynnika tej koniunkcji. Rozpatrujemy w ten sposób dwa przypadki: w pierwszym fałszywy jest pierwszy czynnik (o drugim zaś nie mówimy nic, może on być zarówno fałszywy, jak i prawdziwy), a w drugim fałszywy jest drugi czynnik (tym razem niczego nie przesądzamy o pierwszym czynniku). Kolejne dwie reguły dotyczą alternatywy i zaprzeczenia alternatywy. Alternatywa jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwy jest co najmniej jeden z jej składników. Jeśli więc na gałęzi znajduje się alternatywa, to należy dokonać rozgałęzienia i umieścić składniki tej alternatywy na kolejnych gałęziach.

Reguła A:
$$\begin{array}{c} \surd\ \mathcal{A} \lor \mathcal{B} \\ / \quad \backslash \\ \mathcal{A} \qquad \mathcal{B} \end{array}$$

Tę regułę nazwiemy A. Natomiast reguła NA dotyczy zaprzeczenia alternatywy. Alternatywa jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa jej składniki są fałszywe.

Reguła NA:
$$\begin{array}{c} \surd\ \neg(\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \\ | \\ \neg\mathcal{A} \\ \neg\mathcal{B} \end{array}$$

Aby zanalizować zaprzeczenie alternatywy, należy zatem wpisać na tej samej gałęzi zaprzeczenia obu składników tej alternatywy. Rozważanie reguł analitycznych dotyczących implikacji rozpoczniemy od zaprzeczenia wyrażenia o tej postaci. Powiedzieliśmy, że implikacja jest fałszywa dokładnie w jednym, jedynym wypadku: mianowicie takim, że jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Możemy więc sforkułować regułę NC.

Reguła NC:
$$\begin{array}{c} \surd\; \neg(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \\ | \\ \mathcal{A} \\ \neg\mathcal{B} \end{array}$$

Reguła ta nakazuje wpisać na odnośniej gałęzi, na której występuje negacja implikacji, poprzednik tej implikacji i negację następnika tej implikacji. W każdym wypadku innym niż ten, który scharakteryzowaliśmy, implikacja jest prawdziwa. Formułując regułę C, powinniśmy dopuścić, że nie jest spełniony co najmniej jeden warunek fałszywości implikacji, aczkolwiek nie wiadomo nam, który. Reguła analityczna C stwierdza zatem, że w razie wystąpienia na pewnej gałęzi implikacji, należy dokonać rozgałęzienia. Na pierwszej gałęzi należy wpisać negację poprzednika, a na drugiej następnik tej implikacji.

Reguła C:
$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\; \mathcal{A} \to \mathcal{B}} \\ / & \backslash \\ \neg\mathcal{A} & \mathcal{B} \end{array}$$

Rozważamy więc dwie możliwości: bądź poprzednik jest fałszem (nic zaś nie mówimy o następniku), bądź też następnik jest prawdą (nic zaś nie mówimy o poprzedniku). W każdej z tych sytuacji, i tylko w nich, implikacja jest zdaniem prawdziwym. Pozostaje nam sformułowanie reguł analitycznych dla równoważności i jej zaprzeczenia. Równoważność jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy jej strony zgadzają się pod względem wartości logicznej, i fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy jej strony różnią się pod względem wartości logicznej. Zatem reguła E, jeśli na gałęzi występuje równoważność, nakazuje dokonać rozgałęzienia, wpisując na pierwszej nowej gałęzi obie strony równoważności, a na drugiej nowej gałęzi zaprzeczenia tych wyrażeń.

Reguła E:
$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\; \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}} \\ / & \backslash \\ \mathcal{A} & \neg\mathcal{A} \\ \mathcal{B} & \neg\mathcal{B} \end{array}$$

Jeśli natomiast na pewnej gałęzi występuje negacja równoważności, to reguła NE każe, również po dokonaniu rozgałęzienia, umieścić na pierwszej gałęzi lewą stronę i negację prawej, a na drugiej gałęzi negację lewej strony i stronę prawą tej równoważności.

Reguła NE:
$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\; \neg(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})} \\ / & \backslash \\ \mathcal{A} & \neg\mathcal{A} \\ \neg\mathcal{B} & \mathcal{B} \end{array}$$

Zatem zarówno w odniesieniu do równoważności, jak i w odniesieniu do jej zaprzeczenia, musimy rozważyć dwa przypadki. Podamy jeszcze kilka uwag praktycznych, dotyczących stosowania reguł analitycznych do wyrażeń znajdujących się na drzewie:

- stosując pewną regułę do wyrażenia, należy wykonać operacje nakazane przez regułę na każdej otwartej gałęzi, na której znajduje się to wyrażenie;
- nowe wyrażenie należy wpisywać na dole gałęzi, poniżej wszystkich wyrażeń, które już się na tej gałęzi znajdują;
- w pierwszym rzędzie warto stosować reguły, które nie wymagają rozgałęziania;
- po każdym zastosowaniu reguły warto sprawdzić, czy któraś z gałęzi nie może zostać zamknięta; warto zamykać gałęzie tak szybko, jak to możliwe.

Pierwsza wskazówka praktyczna ma charakter obowiązkowy, objaśnia istotną własność drzew. Pozostałe mają raczej naturę organizacyjną. Postępowanie zgodne z tymi regułami zapewnia ekonomiczne uzyskiwanie pożądanego rezultatu.

Uwzględniając definicję 8 oraz twierdzenie 10, możemy podać już przepis na badanie wynikania logicznego i sprzeczności za pomocą drzew analitycznych. Pamiętamy przy tym, że zamknięte drzewo wskazuje na brak modelu semantycznego wyrażeń stanowiących korzeń tego drzewa. Natomiast drzewo, które po zakończeniu pozostaje otwarte wskazuje na istnienie takiego modelu semantycznego, a nawet go wyznacza.

Twierdzenie 16 *Wyrażenie $\mathcal{B}$ wynika logicznie z wyrażeń: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,…, $\mathcal{A}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo analityczne, rozpoczynające się od wyrażeń $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,…, $\mathcal{A}_n$, $\ulcorner\neg\mathcal{B}\urcorner$, zamyka się.*

Twierdzenie 17 *Zbiór złożony z wyrażeń: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,…, $\mathcal{A}_n$ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo analityczne, rozpoczynające się od tychże wyrażeń: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,…, $\mathcal{A}_n$ zamyka się.*

Dla przykładu pokażemy, że z $p \to q, p \vdash q$ W tym celu, otwierając drzewo wypisujemy na pniu implikację i jej poprzednik oraz negację następnika. Stosując reguły budowy drzew analitycznych, uzyskujemy drzewo zamknięte.

$$\begin{array}{c} \surd\; p \to q \\ p \\ \neg q \\ \diagup \qquad \diagdown \\ \neg p \qquad\quad q \\ \otimes \qquad\quad \otimes \end{array}$$

Natomiast $p \to q, q \nvDash p$. Pokazuje to następujące drzewo.

$$\begin{array}{c} \surd\; p \to q \\ q \\ \neg p \\ \diagup \qquad \diagdown \\ \neg p \qquad\quad q \\ \odot \qquad\quad \odot \end{array}$$

Drzewo to jest zakończone, ale wszystkie jego gałęzie są otwarte. Przypomnijmy, że wystarczyłoby, by jedna gałąź pozostała otwarta po zakończeniu drzewa, by odpowiedź na pytanie o zachodzenie wynikania była negatywna. Zgodnie z zasadami odczytywania otwartej gałęzi (s. 66) każda otwarta gałąź tego drzewa wyznacza interpretację, która stanowi model wyrażeń umieszczonych w korzeniu, a tym samym kontrprzykład dla domniemanego wynikania. W tym wypadku obie gałęzie wyznaczają tę samą interpretację V: $V(p) = \mathtt{0},\ V(q) = \mathtt{1}$.

Pokażemy teraz, że zbiór wyrażeń $\{(p \vee q), \neg p, \neg q\}$ jest sprzeczny. W tym celu, otwierając drzewo, umieszczamy w korzeniu rozważane wyrażenia. Następnie stosujemy reguły analityczne.

$$\begin{array}{c} \surd\; p \vee q \\ \neg p \\ \neg q \\ \diagup \qquad \diagdown \\ p \qquad\quad q \\ \otimes \qquad\quad \otimes \end{array}$$

Drzewo zamyka się. Wnosimy stąd, że rozważany zbiór wyrażeń nie ma modelu semantycznego. Analogicznie badamy antylogie, czyli wyrażenia same w sobie sprzeczne. Stosujemy więc twierdzenie 17 dla $n = 1$. Przykładem antylogii jest wyrażenie „$p \wedge \neg p$”, co pokazuje kolejne drzewo.

$$\begin{array}{l} \surd\ p \wedge \neg p \\ \qquad p \\ \qquad \neg p \\ \qquad \otimes \end{array}$$

Twierdzenie 18 *Wyrażenia $\mathcal{A}$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo rozpoczynające się negacją $\ulcorner \neg\mathcal{A} \urcorner$ tego wyrażenia zamyka się.*

Przykładem tautologii może być wyrażenie „$p \equiv p$”, co pokazuje kolejne drzewo.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ \neg(p \equiv p)} \\ / & \backslash \\ p & \neg p \\ \neg p & p \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Antylogiczność wyrażenia badamy nw oparciu o twierdzenie 17, przyjmując po prostu, że $n = 1$. Wyrażenie $\mathcal{A}$ jest więc antylogią wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo rozpoczynające się tym wyrażeniem zamyka się.

Zaprezentowane tutaj ujęcie klasycznego rachunku zdań ma trzy własności, które należą do najważniejszych cnót logicznych: *bezbłędność*, *pełność* i *rozstrzygalność*. Technika drzew semantycznych w klasycznym rachunku zdań jest bezbłędna w tym sensie, że dany związek logiczny faktycznie zachodzi w języku klasycznego rachunku zdań zawsze, ilekroć drzewo analityczne na to wskazuje. Jest to też technika pełna w tym sensie, że każdy związek logiczny zachodzący w języku klasycznego rachunku zdań może być wykryty za pomocą drzewa analitycznego. Ponadto metoda drzew analitycznych w klasycznym rachunku zdań jest *algorytmem*. Znaczy to, że w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków, które zostały opisane, zawsze dostarcza odpowiedzi na każde pytanie z zakresu klasycznego rachunku zdań. Teorię, dla której istnieje algorytm rozstrzygania wszystkich problemów, nazywamy właśnie rozstrzygalną.

Należy jeszcze zauważyć pewne ograniczenie prezentowanej metody. Mianowicie za pomocą drzew analitycznych można badać jedynie zbiory skończone. Nie można bowiem umieścić w korzeniu nieskończenie wielu wyrażeń. Do tego problemu wypadnie nam jeszcze wrócić, zaznaczmy więc tylko, że w wypadku klasycznego rachunku zdań nie jest to ograniczenie istotne. Można bowiem wykazać, że każda konsekwencja zbioru nieskończonego jest zarazem konsekwencją któregoś z jego skończonych podzbiorów.

Przykłady. Za pomocą drzew analitycznych można badać dowolne zależności logiczne w języku klasycznego rachunku zdań. Pokażemy tu najsłynniejsze lub odgrywające największą rolę w ozasadnianiu przykłady reguł i innych zależności, niektóre opatrując komentarzem. Następujące zależności są charakterystyczne dla wynikania logicznego w kontekście funktora implikacji:

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \nvdash \mathcal{A}, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \vdash \neg\mathcal{A}, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \nvdash \neg\mathcal{B}, \tag{2.8}$$

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{C}. \tag{2.9}$$

Reguła (2.5) nazywa się *Modus Ponens*, a reguła (2.7) nazywa się *Modus Tollens*. Reguła (2.9) nazywa się Regułą Sylogizmu Warunkowego. Dla funktora równoważności zachodzą analogiczne związki, z tym, że w większej liczbie wypadków mamy do czynienia z wynikaniem logicznym:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}, \tag{2.10}$$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \vdash \neg\mathcal{A}, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \vdash \neg\mathcal{B}, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}, \mathcal{B} \equiv \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \equiv \mathcal{C}. \tag{2.14}$$

Fakt, że reguły (2.11) i (2.11) obowiązują, wobec (2.6) i (2.8), świadczy o tym, że funktor równoważności oddaje mocniejszy związek między wyrażeniami niż funktor implikacji. Z drugiej strony zachodzi głęboka analogia między impliacją a równoważnością, mianowicie równoważność jest logicznie równoważna odpowiednim implikacjom w obie strony:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \sim \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{A}. \tag{2.15}$$

Z tego powodu zachodzi tradycyjne podobieństwo w nazewnictwie reguł dotyczących implikacji i reguł dotyczących równoważności. Reguły (2.10) i (2.11) są często określane jako Modus Ponens, reguły (2.12) i (2.13) są często określane jako Modus Tollens, a reguła (2.14) jest często określana jako Reguła Sylogizmu Warunkowego. Niekiedy, dla odróżnienia od związanych z implikacją oryginałów, do tych nazw jest dodawane zastrzeżenie „dla równoważności". Z funktorem alternatywy wiąże się grupa następujących ważnych reguł:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}, \tag{2.16}$$
$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \nvdash \neg\mathcal{B}, \tag{2.17}$$
$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}, \tag{2.18}$$
$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{B} \nvdash \neg\mathcal{A}, \tag{2.19}$$
$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \to \mathcal{C}, \mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \mathcal{C} \tag{2.20}$$

Reguły (2.16) i (2.18) nazywają się Regułami Rezolucji, a reguła (2.20) Dylematem Konstrukcyjnym lub Sylogizmem Tertuliana. Do najbardziej charakterystycznych tautologii należą:

$$p \equiv p, \tag{2.21}$$
$$p \equiv \neg\neg p, \tag{2.22}$$
$$\neg(p \wedge \neg p), \tag{2.23}$$
$$p \vee \neg p, \tag{2.24}$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q, \tag{2.25}$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \tag{2.26}$$
$$(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p), \tag{2.27}$$
$$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q), \tag{2.28}$$
$$\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q). \tag{2.29}$$

Wyrażenie (2.21) nazywa się Prawem Tożsamości, wyrażenie (2.22) nazywa się Prawem Podwójnego Przeczenia, wyrażenie (2.23) nazywa się Prawem Niesprzeczności, wyrażenie (2.24) nazywa się Prawem Wyłączonego Środka, wyrażenie (2.25) i wyrażenie (2.26) nazywają się Prawami De Morgana, wyrażenie (2.27) nazywa się Prawem Transpozycji Prostej, wyrażenie (2.28) nazywa się Prawem Zastępowania Implikacji, a wyrażenie (2.29) nazywa się Prawem Negowania Implikacji.

Rekurencyjne uogólnienia reguł. Niektóre reguły inferencyjne można z pożytkiem uogólnić na dowolną, skończoną liczbę przesłanek. Staosujemy do tego rekurencyjne metody dowodzenia twierdzeń. Pokażemy przykładowe — ale ważne — uogólnienia reguł (2.9), (2.14), (2.20). Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą naturalną. Regułę Sylogizmu Warunkowego można uogólnić na dowolną liczbę przesłanek. Na mocy tej reguły logiczne jest każde wnioskowanie

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{A} \to \mathcal{B}_1, \\
\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2, \\
\ldots, \\
\mathcal{B}_{n-1} \to \mathcal{B}_n, \\
\mathcal{B}_n \to \mathcal{C}, \\
\hline
\mathcal{A} \to \mathcal{C}.
\end{array}
\tag{2.30}
$$

Że każda z syntetycznie ujętych tu wnioskowań jest logiczne, dowodzimy rekurencyjnie. Jeśli $n = 1$, to powstaje po prostu reguła (2.9), którą możemy zbadać choćby za pomocą drzewa analitycznego. Załóżmy teraz, że regułę (2.30) udało się udowodnić dla pewnego n. Na mocy tego założenia z wyrażeń

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1} \to \mathcal{C}$$

Wynika wyrażenie $\ulcorner \mathcal{A} \to \mathcal{B}_{n+1} \urcorner$. Z tego zaś wyrażenia i z ostatniej przesłanki $\ulcorner \mathcal{B}_{n+1} \to \mathcal{C} \urcorner$, na mocy reguły (2.9), wynika wyrażenie $\ulcorner \mathcal{A} \to \mathcal{C} \urcorner$. To ończy dowód. Analogicznie dowodzimy logiczności wnioskowań typu

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_1, \\
\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_2, \\
\ldots, \\
\mathcal{B}_{n-1} \equiv \mathcal{B}_n, \\
\mathcal{B}_n \equiv \mathcal{C}, \\
\hline
\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}.
\end{array}
\tag{2.31}
$$

Dowód jest tutaj bardzo podobny do poprzedniego dowodu. Ponadto można dowieść logiczności wszelkich wnioskowań typu

$$
\begin{array}{l}
\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \ldots \vee \mathcal{A}_n, \\
\mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}, \\
\mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}, \\
\ldots, \\
\mathcal{A}_n \to \mathcal{B}, \\
\hline
\mathcal{B}.
\end{array}
\tag{2.32}
$$

Również w tym wypadku, w wypadku uogólnionego Dylematu Konstrukcyjnego, dowód logiczności wnioskowania ma charakter rekurencyjny.

Twierdzenie o dedukcji. Jacques Herbrand i Alfred Tarski, niezależnie od siebie, dowiedli ważnego twierdzenia, określającego relację między wynikaniem logicznym a funktorem implikacji. Dla dowolnego zbioru X wyrażeń i dla dowolnych wyrażeń $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ Twierdzenie o Dedukcji głosi, że

$$X \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}. \tag{2.33}$$

To znaczy, implikacja wynika ze zbioru wyrażeń wtedy i tylko wtedy, gdy z tego zbioru wzmocnionego o poprzednik tej implikacji wynika jej następnik. Aby dowieść, że tak jest, zauważmy, że implikacja $\ulcorner \mathcal{A} \to \mathcal{B} \urcorner$ wynika ze zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia składające się na zbiór X, a fałszywe jest wyrażenie $\ulcorner \mathcal{A} \to \mathcal{B} \urcorner$. To znaczy, nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia składające się na zbiór X i wyrażenie $\mathcal{A}$, a fałszywe jest wyrażenie $\mathcal{B}$. To zaś znaczy tyle, że wyrażenie $\mathcal{B}$ wynika ze zbioru X i wyrażenia $\mathcal{A}$. Zgodnie z Twierdzeniem o Dedukcji przesłanki dowolnego wnioskowania dedukcyjnego wolno przenosić do konkluzji jako poprzedniki i odwrotnie. Na przykład wnioskowanie

$$\frac{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n,}{\mathcal{B}}$$

jest niezawodne wtedy i tylko wtedy, gdy niezawodne jest każde z wnioskowań:

$$\frac{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_n,}{\mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}} \qquad \frac{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_n,}{\mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}}$$

itd. Twierdzenie o Dedukcji może być stosowane wielokrotnie, prowadząc do przeniesienia między zbiorem przesłanek a konkluzją wielu wyrażeń, np.

$$\frac{\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \ldots, \mathcal{A}_n,}{\mathcal{A}_1 \to (\mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}),}$$

a nawet wszystkich wyrażeń. Z Twierdzenia o Dedukcji wolno więc wysnuć taki wniosek, że

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie

$$\mathcal{A}_1 \to (\mathcal{A}_2 \to \cdots \to (\mathcal{A}_n \to \mathcal{B}) \cdots)$$

jest tautologią. Łatwo się przekonać, że jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest wyrażenie

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}.$$

Analogiczne zależności obowiązują dla związku równoważności i związku sprzeczności. W odniesieniu do logicznej równoważności zbiorów wyrażeń powiemy, że

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m \sim \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie

$$(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_m) \equiv (\mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_n)$$

jest tautologią. Natomiast w odniesieniu do logicznej sprzeczności powiemy, że zbiór wyrażeń

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$$

jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n$$

jest antylogią. Aby się o zachodzeniu tych zależności przekonać, wystarczy chwila namysłu nad definicjami związków logicznych i pojęciem interpretacji. Zauważmy, że odpowiedniość między związkami wynikania, sprzeczności i równoważności a właściwymi tautologiami lub antylogiami zachodzi wyłącznie w odniesieniu do niepustych i skończonych zbiorów wyrażeń. W niniejszym akapicie m i n są liczbami naturalnymi większymi od zera. Natomiast Twierdzenie o Dedukcji w ogólnym sformułowaniu (5.22) obowiązuje dla dowolnego zbioru X wyrażeń, a więc również dla zbioru pustego i zbioru nieskończonego.

Twierdzenie o Dedukcji wraz z płynącymi zeń wnioskami należy do fundamentów klasycznego rachunku zdań i obowiązuje w całej logice klasycznej. Istnieją natomiast nieklasyczne logiki, w których to twierdzenie ani powiązane z nim zależności nie obowiązują.

Rozdział 3

Logika pierwszego rzędu

Logika pierwszego rzędu — zwana też węższym rachunkiem predykatów lub węższym rachunkiem kwantyfikatorów — stanowi drugą istotną część klasycznego rachunku logicznego, nadbudowaną nad klasycznym rachunkiem zdań. Występuje ona w kilku zbliżonych do siebie wariantach, z których dwa najważniejsze wiążą się z występowaniem znaku równości i symboli funkcyjnych.

3.1 Wyrażenia logiki pierwszego rzędu

Mimo swej podstawowej pozycji klasyczny rachunek zdań nie jest satysfakcjonujący jako model wynikania logicznego. Można podać ewidentne przypadki wynikania, którego ten rachunek nie chwyta. Weźmy dla przykładu pod uwagę wnioskowanie:

każdy delfin jest ssakiem,
każdy ssak jest kręgowcem,
―――――――――――――――
każdy kręgowiec jest ssakiem.

Otóż gołym okiem widać, że wniosek jest w tym wypadku logiczną konsekwencją przesłanek. Tymczasem na gruncie klasycznego rachunku zdań należałoby — w braku funktorów prawdziwościowych — przyporządkować pierwszej przesłance literę „p", drugiej literę „q", a wnioskowi literę „r". Następnie natychmiast okazałoby się, że $p, q \not\models r$, a więc konkluzja nie wynika logicznie z przesłanek. Przekonuje o tym kontrprzykład w postaci interpretacji $V(p) = V(q) = \mathtt{1}$, $V(r) = \mathtt{0}$. Chwila namysłu wystarczy, by dostrzec źródło tej trudności. Mianowicie w klasycznym rachunku zdań nie można w żaden sposób uwzględnić wewnętrznej struktury zdań prostych. Litery zdaniowe są najmniejszymi jednostkami i jako takie są od siebie całkowicie niezależne. Interpretacja jednej litery nie wpływa na interpretację innych liter. Tymczasem, najwidoczniej, niektóre związki logiczne zależą właśnie od tego, w jaki sposób zbudowane są zdania proste. Logika standardowa powstaje z klasycznego rachunku zdań właśnie przez uwzględnienie wewnętrznej struktury zdania prostego.

Struktura zdania prostego. Ustalona przez logików struktura zdania prostego odbiega od tej struktury, jaką przyjmują filologowie. Ta ostatnia opiera się na morfologii zdania, podczas gdy pierwsza odwołuje się do znaczenia. Już Platon doszedł do przekonania, że najbardziej podstawowa jednostka informacji, zdanie proste składa się z dwóch komponentów:

- podmiot logiczny,
- predykat (orzecznik).

Za pomocą podmiotu wskazujemy przedmiot lub przedmioty, których dotyczy informacja, a za pomocą predykatu charakteryzujemy te przedmioty w pewien sposób — trafnie lub mylnie. Na przełomie XIX i XX w., głównie dzięki niezależnym pracom dwóch wielkich logików: C. S. Peirce'a i G. Fregego, udoskonalono ujęcie Platona. Przyjęto mianowicie, że podmiot logiczny może się składać z jednego lub kilku znaków, z których każdy wskazuje na dokładnie jeden przedmiot, zaś predykat charakteryzuje wszystkie te przedmioty łącznie. Znaki tworzące podmiot logiczny zapisujemy zwykle w nawiasie, a predykat umieszczamy przed tym nawiasem.

Na przykład zdanie „Otello kocha Desdemonę" można zanalizować jako dotyczące Otella i charakteryzujące go jako kogoś, kto kocha Desdemonę. Napisano by wówczas:

kocha Desdemonę (Otello).

Wskazujemy tu na Otella (podmiot) i mówimy o nim, że kocha Desdemonę (predykat). Równie dobrze wolno nam uznać, że zdanie to dotyczy Desdemony (podmiot) i mówi o niej, że Otello ją kocha (predykat). Napiszemy wówczas:

Otello kocha (Desdemona).

Jest też i taka możliwość, że rozważane zdanie mówi o parze, czy też o ciągu przedmiotów, złożonym z Otella i Desdemony (podmiot), przypisując im to, że drugi wyraz ciągu jest kochany przez pierwszy (predykat):

kocha (Otello, Desdemona).

W tym właśnie wypadku podmiot logiczny składa się aż z dwóch znaków, z których każdy odnosi się do dokładnie jednego przedmiotu. Podmiot logiczny może składać się z jeszcze większej liczby znaków. Na przykład zdanie „Otello sądzi, że Desdemona kocha Cassia" może być zanalizowane jako:

sądzi-kocha (Otello, Desdemona, Cassio).

Zauważmy, że kolejność znaków tworzących podmiot logiczny nie jest obojętna. Jeśli bowiem zdanie „kocha (Otello, Desdemona)” znaczy, że Otello kocha Desdemonę, to zdanie „kocha (Desdemona, Otello)” znaczy, że Desdemona kocha Otella.

Nazwy i predykaty. Znaki, które nadają się do wskazywania na jakieś przedmioty, określamy jako *nazwy.* Nazwami są często rzeczowniki, np. „wieloryb”, przymiotniki, np, „piękny”, i liczebniki, np. „sześć”. Funkcję nazw pełnią również zbitki wyrazów, np. „król Polski”, „suma liczb: sześć i dziewięć”. Znaczenie nazwy określamy jako *pojęcie.* Każdy przedmiot, na który — przy ustalonym znaczeniu — wskazuje nazwa, jest *desygnatem* tej nazwy. Na przykład desygnatem nazwy „krowa” jest każda krowa: Krasula, Mućka, Miła itd., a desygnatem nazwy „liczba naturalna” jest każda liczba naturalna: sześć, pięćset jedenaście itd. Mówimy, że nazwa *oznacza* każdy ze swoich desygnatów. Zbiór wszystkich desygnatów nazwy, przy jej ustalonym znaczeniu, określamy jako *zakres* lub *denotację* tej nazwy. Mówimy, że nazwa *denotuje* swój zakres. O desygnatach nazwy i zakresu mówimy też, że są odpowiednio desygnatami lub zakresem właściwego pojęcia.

Ze względu na liczbę desygnatów dzielimy nazwy na *ogólne*, które mają więcej niż jeden desygnat, *jednostkowe*, które mają dokładnie jeden desygnat, i *puste*, które nie mają desygnatów. Przykładami nazwy ogólnej są nazwy: „student” i nazwa „liczba”, jednostkowej nazwy: „najwyższy szczyt Tatr”, „liczba dwadzieścia siedem”, a pustej nazwy: „kwadratowe koło”, „trzydziesty lutego”, „król Stanów Zjednoczonych Ameryki”.

Zwrot, który tworzy zdanie w połączeniu z n nazwami, określamy jako n-argumentowy *predykat*, a wspomniane nazwy jako argumenty tego predykatu. Jeśli weźmiemy pod uwagę wyrażenie „kocha (Otello, Desdemona)”, to znak „kocha” jest dwuargumentowym predykatem, zaś nazwy: „Otello” i „Desdemona” są kolejnymi argumentami tego predykatu. Zamiast o predykacie wolno też mówić o *orzeczniku.* Jeżeli wszystkie argumenty predykatu są nazwami jednostkowymi, to taki predykat określamy jako predykat pierwszego rzędu.

Jedynynymi nazwami, jakie występują w logice standardowej, są nazwy jednostkowe, a jedynymi predykatami w tej logice są predykaty pierwszego rzędu. Będziemy więc mówić krótko o predykatach, mając na myśli zawsze predykaty pierwszego rzędu. Ponadto, mówiąc krótko o nazwach, będziemy mieli na myśli zawsze nazwy jednostkowe. Jeśli zajdzie potrzeba powiedzenia czegoś o innych nazwach lub predykatach wyraźnie to zaznaczymy. Zaznaczmy jeszcze, że funkcje nazw innych niż jednostkowe w logice standardowej przejmują predykaty.

Alfabet. Alfabet logiki standardowej powstaje przez rozszerzenie alfabetu klasycznego rachunku zdań i jest od tamtego nieco bardziej skomplikowany. Do alfabetu logiki standardowej należą następujące znaki:

- stałe terminy logiczne, w szczególności

  funktory prawdziwościowe „$\neg$", „$\wedge$", „$\vee$", „$\rightarrow$", „$\equiv$",

  kwantyfikator ogólny „$\forall$",

  kwantyfikator szczegółowy „$\exists$",

- litery schematyczne, w szczególności

  litery zdaniowe „p", „q", „r", „p_1", „p_2" itp.,

  litery nazwowe „a", „b", „c", „a_1", „a_2" itp.,

  litery predykatowe „P", „Q", „R", „P_1", „P_2" itp.,

- zmienne indywidualne „x", „y", „z", „x_1", „x_2" itp.,

- nawiasy, przecinek i dwukropek.

Nawiasy, dwukropek i przecinek są znakami interpunkcyjnymi, zaś funktorów prawdziwościowych i liter zdaniowych dotyczą te same uwagi, które poczyniliśmy już, omawiając język klasycznego rachunku zdań. Znak „$\forall$" nazywa się *kwantyfikatorem ogólnym*, a znak „$\exists$" *kwantyfikatorem szczegółowym*. Litery nazwowe reprezentują dowolne nazwy jednostkowe, a litery predykatowe reprezentują dowolne predykaty pierwszego rzędu. Litery nazwowe określamy też jako *nazwy schematyczne*, a litery predyktowe jako *schematyczne predyktaty*. Zmienne indywidualne są podobne do nazw jednostkowych pod tym względem, że z każdą zmienną związany jest zbiór przedmiotów, zwany *zakresem* tej zmiennej lub *zakresem zmienności* tej zmiennej. Jednak zmienna nie jest nazwą elementów tego zbioru i nie wolno jej o nich orzekać. Aby to zaznaczyć, nie mówimy, że zmienna denotuje swój zakres, lecz że go *przebiega*. Jeśli nie zaznaczono czegoś przeciwnego, to zakresem zmiennych jest zbiór desygnatów wszystkich używanych nazw. Zmienne indywidualne i nazwy (w tym wypadku schematyczne litery nazwowe) łącznie określamy mianem *termów*. Mówiąc „term" nie przesądzamy zatem, czy mamy do czynienia ze zmienną, czy z literą nazwową.

Zmienne, które służą do mówienia w metajęzyku o dowolnych wyrażeniach, pozostają niezmienione. Ponadto wprowadzamy małe greckie litery: „α" (alfa), „β" (beta) i „δ" (delta), z indeksami lub bez, jako metajęzykowe zmienne, służące do mówienia o dowolnych symbolach języka przedmiotowego.

Składanie wyrażeń. Wyrażeniami atomicznymi (prostymi) logiki pierwszego rzędu są wszystkie litery zdaniowe oraz wszystkie wyrażenia zbudowane z n-argumentowego predykatu i n termów, będących argumentami tego predykatu, ujętych w nawias i oddzielonych przecinkami, na przykład „$P(a)$”, „$P(x, y)$”, „$Q(a, x, z)$”. Na liczbę argumentów predykatu wskazuje zawsze kontekst. Jeśli nie prowadzi to do nieporozumienia, nawiasy i przecinki wolno opuszczać: „Pa”, „Pxy”, „$Qaxz$”. Tę samą myśl można wyrazić bardziej oficjalnie, mówiąc, że wyrażeniami atomicznymi są wszystkie litery zdaniowe oraz wszystkie napisy $\ulcorner\delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\urcorner$, w których δ jest n-argumentowym predykatem, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są termami.

Zbiór wyrażeń logiki standardowej jest to najmniejszy taki zbiór, że

- wszystkie wyrażenia atomiczne są wyrażeniami,
- jeżeli $\mathcal{A}$ jest wyrażeniem, to $\ulcorner(\neg\mathcal{A})\urcorner$ też jest wyrażeniem,
- jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są wyrażeniami, to $\ulcorner(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})\urcorner$, $\ulcorner(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})\urcorner$, $\ulcorner(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})\urcorner$ oraz $\ulcorner(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})\urcorner$ również są wyrażeniami,
- jeżeli $\mathcal{A}$ jest wyrażeniem, zaś α jest zmienną indywidualną, to $\ulcorner\forall\alpha\colon \mathcal{A}\urcorner$ oraz $\ulcorner\exists\alpha\colon \mathcal{A}\urcorner$ też są wyrażeniami.

Wyrażenia, które powstają na podstawie czwartego warunku, nazywają się *determinacjami* wyrażenia $\mathcal{A}$. Pierwsze z nich nazywa się determinacją *ogólną*, a drugie *szczegółową*. Funktorem głównym każdej determinacji jest widoczny w osnowie warunku kwantyfikator, wyrażenie $\mathcal{A}$ nazywa się *zasięgiem* tego kwantyfikatora, zaś o zmiennej α mówimy, że występuje *pod* kwantyfikatorem lub że jest zmienną *podkwantyfikatorową*.

Pożyteczne są pewne upraszczające umowy. Podobnie, jak w rachunku zdań, zezwalamy na opuszczanie nawiasów zewnętrznych i tych nawiasów, których można się domyślić na podstawie zawartych umów. W odniesieniu do kwantyfikatorów umawiamy się ponadto, że ich zasięgiem jest najkrótsze poprawnie zbudowane wyrażenie zaczynające się bezpośrednio po dwukropku. Jeśli więc zasięg kwantyfikatora nie jest wyznaczony przez nawias, to kończy się bezpośrednio przed pierwszym egzemplarzem dwuargumentowego funktora zdaniowego — koniunkcji, alternatywy, implikacji lub równoważności. Przykład:

$$\forall x\colon \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \qquad \forall x\colon (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$

pokazuje działanie przyjętej umowy. W pierwszym przypadku zasięgiem kwantyfikatora jest tylko wyrażenie $\mathcal{A}$, a w drugim cała implikacja $\ulcorner(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})\urcorner$. Analogicznie dzieje się w razie wystąpienia innego dwuargumentowego funktora zdaniowego.

Zmienne wolne i związane. Kwantyfikatory pozostają w swoistej relacji do zmiennych indywidualnych. Mówimy, że kwantyfikator może *wiązać* zmienne lub że zmienne mogą być *związane* przez kwantyfikator. Egzemplarze zmiennych związane przez jakikolwiek kwantyfikator nazywamy *związanymi*, a te egzemplarze, które nie są związane przez żaden kwantyfikator, nazywamy *wolnymi*. Zamiast o egzemplarzach mówimy też, że dana zmienna jest odpowiednio związana lub wolna w określonym *miejscu* swego wystąpienia. W szczególności każdy egzemplarz kwantyfikatora wiąże następujące egzemplarze swojej zmiennej podkwantyfikatorowej:

- egzemplarz, który występuje pod tym kwantyfikatorem,
- wszystkie egzemplarze, które są wolne w zasięgu tego kwantyfikatora

i żadnych innych egzemplarzy jakichkolwiek zmiennych. Na przykład w pierwszym z wyrażeń:

$$\forall x\colon (x > 5 \wedge x < 10),$$
$$\forall x\colon\ x > 5 \wedge x < 10$$

wszystkie egzemplarze zmiennej „x" są związane, ponieważ występują w wyznaczonym za pomocą nawiasu zasięgu kwantyfikatora. Natomiast w drugim z wymienionych wyrażeń dwa pierwsze egzemplarze zmiennej są związane, ale ostatni jest wolny. Albowiem w braku nawiasu zasięg kończy się przed funktorem koniunkcji i ostatni egzemplarz zmiennej znajduje się poza tym zasięgiem. Analogicznie dzieje się w razie wystąpienia innego dwuargumentowego funktora zdaniowego. Natomiast znak „>" nie jest funktorem zdaniowym, lecz predykatem, a więc jego wystąpienie nie kończy zasięgu kwantyfikatora. W innym, bardziej skomplikowanym przykładzie:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \forall x\colon & (& \exists x\colon & x & < & y & \to & x & + & y & > & x &) \\ 1 & & 2 & 3 & & & 4 & 5 & & & & 6 & \end{array}$$

wszystkie egzemplarze zmiennej „y" są wolne, a wszystkie egzemplarze zmiennej „x" są związane. To jednak nie kończy sprawy, ponieważ zmienna „x" jest wiązana aż przez dwa kwantyfikatory. Musimy odwołać się więc do zasady, w myśl której kwantyfikator wiąże w swym zasięgu tylko wolne egzemplarze zmiennej podkwantyfikatorowej. W praktyce znaczy to, że bardziej wewnętrzny kwantyfikator ma pierszeństwo w wiązaniu. Zatem w omawianym przykładzie zmienne: 1, 5 i 6 są związane przez kwantyfikator 1, a zmienne: 2 i 3 są związane przez kwantyfikator 2. Albowiem zasięg kwantyfikatora 2 kończy się znakiem implikacji 4, a zasięg kwantyfikatora 1 jest wyznaczony za pomocą nawiasu. W rezultacie zmienne: 2 i 3 są związane w zasięgu kwantyfikatora 1 (właśnie przez kwantyfikator 2), a zmienne 5 i 6 są wolne w zasięgu kwantyfikatora 1 i mogą być przezeń związane.

Alternatywnie — zamiast o egzemplarzach zmiennych — mówimy, że zmienna podkwantyfikatorowa jest związana pod kwantyfikatorem oraz *na wszystkich miejscach*, w których jest wolna w zasięgu tego kwantyfikatora. Tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumienia, mówimy często krótko o zmiennych bez względu na to, czy chodzi o ogólny typ zmiennej, czy też o poszczególny egzemplarz tego typu.

O wyrażeniu, które nie zawiera żadnych zmiennych wolnych, mówimy, że jest *domknięte*, zaś o wyrażeniu, które zawiera co najmniej jedną zmienną wolną, mówimy, że jest *otwarte*.

Prawidłowe podstawienie. Ze względu na obecność kwantyfikatorów jednorodne podstawianie w logice pierwszego rzędu obłożone jest dwiema specjalnymi restrykcjami:

- należy podstawiać wyłącznie za wolne egzemplarze zmiennych,
- w rezultacie podstawienia żadna zmienna wolna nie powinna zostać związana.

Zaznaczmy, że za zmienne indywidualne wolno — z wymienionymi zastrzeżeniami — podstawiać dowolne termy. Symbol:

$$\mathcal{A}(\alpha/\beta)$$

oznacza wyrażenie, które powstaje z wyrażenia $\mathcal{A}$ przez prawidłowe podstawienie termu β za zmienną α. Weźmy na przykład wyrażenie:

$$\exists x\colon\ x < y \rightarrow x + y > x.$$

W rezultacie prawidłowego podstawienia $x/5$ powstaje z niego wyrażenie:

$$\exists x\colon\ x < y \rightarrow 5 + y > 5,$$

W rezultacie prawidłowego podstawienia x/y:

$$\exists x\colon\ x < y \rightarrow y + y > y,$$

a w rezultacie prawidłowego podstawienia x/a:

$$\exists x\colon\ x < y \rightarrow a + y > a.$$

Dwa pierwsze egzemplarze zmiennej „x” pozostają nietknięte, ponieważ są związane. Natomiast podstawienie y/x:

$$\exists x\colon\ x < x \to x + x > x$$

nie byłoby w tym wypadku prawidłowe, ponieważ w rezultacie takiego podstawienia zmienna wolna „x” stałaby się zmienną związaną.

Nieprzestrzeganie omówionych zastrzeżeń jest poważnym błędem. Żeby się o tym przekonać, rozważmy prawdziwe zdanie:

$$\forall y\colon \exists x\colon (y < x)$$

arytmetyki liczb naturalnych. Stwierdza ono, że dla każdej liczby naturalnej y istnieje liczba naturalna x większa od y. Wynika stąd, że dowolne podstawienie za zmienną „y” w wyrażeniu

$$\exists x\colon (y < x)$$

powinno dać w rezultacie zdanie prawdziwe. Rzeczywiście, wszystkie takie zdania, jak

$$\exists x\colon (1 < x), \quad \exists x\colon (65 < x), \quad \exists x\colon (12354 < x)$$

są prawdziwe. Jeśli jednak złamiemy ograniczenia nałożone na podstawianie i podstawimy za „y” zmienną „x”, która stanie się w rezultacie podstawienia zmienną związaną, to otrzymamy zdanie fałszywe

$$\exists x\colon (x < x),$$

które stwierdza, że istnieje liczba naturalna x większa od samej siebie. Widać więc, że przy podstawianiu w logice pierwszego rzędu należy zachować szczególną ostrożność.

Wyrażenia kategoryczne. Osoby początkujące skarżą się często na trudności, jakich nastręcza im formalizacja wyrażeń języka naturalnego w logice pierwszego rzędu. Faktyczne przezwyciężenie tych trudności jest możliwe tylko w drodze wytrwałego treningu. Można wszakże podać pewne użyteczne wskazówki.

Warto zacząć zmaganie z językiem logiki pierwszego rzędu od teorii zdań kategorycznych. Niech „P” i „Q” będą dowolnymi nazwami ogólnymi, jednostkowymi lub pustymi — odstępujemy więc na chwilę od przyjętej umowy o posługiwaniu się wyłącznie nazwami jednostkowymi. Wyrażenia *kategoryczne* są to wyrażenia podpadające pod któryś ze schematów:

każde P jest Q,

żadne P nie jest Q,

pewne P jest Q,

pewne P nie jest Q (nie każde P jest Q).

Wyrażenia podpadające pod pierwszy schemat są *ogólnotwierdzące*, podpadające pod drugi schemat są *ogólnoprzeczące*, podpadające pod trzeci schemat są *szczegółowotwierdzące*, a podpadające pod czwarty schemat są *szczegółowoprzeczące*. Odpowiednio mówimy o dwóch schematach wyrażeń ogólnych i dwóch szczegółowych, dwóch twierdzących i dwóch przeczących.

Ponieważ przyjęliśmy, że nazwy „P" i „Q" mają dowolną liczbę desygnatów, nie mogą wystąpić w logice pierwszego rzędu w roli podmiotu logicznego. Mogą jednak być predykatami, można powiedzieć: x jest P, x jest Q:

$$P(x),\ Q(x).$$

Zamiast powiedzieć, że każde P jest Q, można więc powiedzieć, że każdy x, jeśli tylko jest P, jest też Q:

$$\forall x\colon (P(x) \to Q(x)).$$

Analogicznie można poradzić sobie z pozostałymi schematami wyrażeń kategorycznych, uzyskując odpowiedniki w języku logiki pierwszego rzędu. Są

schemat kategoryczny	odpowiednik
każde P jest Q	$\forall x\colon (P(x) \to Q(x))$
żadne P nie jest Q	$\forall x\colon (P(x) \to \neg Q(x))$
pewne P jest Q	$\exists x\colon (P(x) \wedge Q(x))$
pewne P nie jest Q	$\exists x\colon (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Tablica 3.1: Wyrażenia kategoryczne w logice pierwszego rzędu

one zebrane na tablicy 3.1. W odpowiednikach schematów wyrażeń ogólnych występuje kwantyfikator ogólny i znak implikacji, a w odpowiednikach schematów wyrażeń szczegółowych kwantyfikator szczegółowy i znak koniunkcji. Ponadto w odpowiednikach schematów wyrażeń przeczących występuje znak negacji, a w odpowiednikach schematów wyrażeń twierdzących nie.

Praktyka formalizacji wyrażeń kategorycznych daje się często rozszerzać na inne wyrażenia. Na przykład wyrażenie „każda koza daje mleko" można rozumieć jako skrót wyrażenia ogólnotwierdzącego „każda koza jest czymś takim, że daje mleko". Podpada więc pod schemat „$\forall x\colon (P(x) \rightarrow Q(x))$", w którym „$P(x)$" znaczy, że x jest kozą, a „$Q(x)$" znaczy, że x daje mleko.

Za pomocą jednoargumentowych predykatów i wyrażeń kategorycznych można obsłużyć dużą liczbę rzeczowników i przymiotników.

Predykaty wieloargumentowe. Predykaty wieloargumentowe — to znaczy predykaty o liczbie argumentów większej niż jeden — należy wprowadzać, jeśli ma się do czynienia z relacjami, zwłaszcza jeśli jakaś relacja ma zróżnicowane wystąpienia. Wolno przyjmować, że wieloargumentowym predykatom w pozajęzykowej rzeczywistości odpowiadają relacje.

Jeśli chcemy powiedzieć, że Desdemona kocha Otella, ale nie kocha Jagona, możemy posłużyć się jednoargumentowym predykatem „P", przyjmując, że „$P(x)$" znaczy, że Desdemona kocha x. Wówczas, jeśli nazwa „a" oznacza Otella, a „b" Jagona, powiemy:

$$P(a) \wedge \neg P(b).$$

Możemy sobie na to pozwolić tylko dlatego, że w obu wypadkach kochająca jest ta sama osoba. Jeśli jednak chcemy powiedzieć, że Otello kocha Desdemonę, a Desdemona kocha Otella, to musimy wprowadzić dwuargumentowy predykat „R", przyjmując, że „$R(x, y)$" znaczy, że x kocha y. Jeśli ponadto nazwa „c" oznacza Desdemonę, powiemy:

$$R(a, c) \wedge R(c, a).$$

Ogólnie, w odniesieniu do relacji, bezpieczniej jest posługiwać się predykatami wieloargumentowymi.

Wyrażenie atomiczne zbudowane za pomocą dwuargumentowego predykatu „R" — niech nadal znaczy on tyle, co „kocha" — i zmiennych może być zdeterminowane kwantyfikatorami na dziesięć różnych sposobów:

$$\forall x\colon R(x, x), \tag{3.1}$$
$$\exists x\colon R(x, x), \tag{3.2}$$
$$\forall x\colon \forall y\colon R(x, y), \tag{3.3}$$
$$\forall y\colon \forall x\colon R(x, y), \tag{3.4}$$
$$\exists x\colon \exists y\colon R(x, y), \tag{3.5}$$
$$\exists y\colon \exists x\colon R(x, y), \tag{3.6}$$
$$\forall x\colon \exists y\colon R(x, y), \tag{3.7}$$
$$\exists y\colon \forall x\colon R(x, y), \tag{3.8}$$
$$\forall y\colon \exists x\colon R(x, y), \tag{3.9}$$
$$\exists x\colon \forall y\colon R(x, y). \tag{3.10}$$

Wyrażenie (3.1) znaczy, że każdy kocha samego siebie, a wyrażenie (3.2), że ktoś, co najmniej jeden, kocha samego siebie. Wyrażenie (3.3) znaczy, że każdy kocha każdego, a wyrażenie (3.4), że każdy jest kochany przez każdego. Wyrażenie (3.5) znaczy, że jest ktoś taki, kto kogoś kocha, a wyrażenie (3.6), że jest ktoś taki, kto jest przez kogoś kochany. Wyrażenie (3.7) znaczy, że każdy kogoś kocha, a wyrażenie (3.8) znaczy, że jest ktoś taki, kto jest kochany przez każdego. Wyrażenie (3.9) znaczy, że każdy jest przez kogoś kochany, a wyrażenie (3.1) znaczy, że jest ktoś taki, kto kocha wszystkich.

Dwuargumentowy predykat „R” określamy jako *zwrotny* wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.1). Predykat ten jest *symetryczny* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x\colon \forall y\colon (R(x,y) \to R(y,x)),$$

zaś jest przechodni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x\colon \forall y\colon \forall z\colon (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)).$$

Predykat, który jest zarazem zwrotny, symetryczny i przechodni, nazywamy *równoważnościowym*. Analogicznie mówi się o zwrotnych, symetrycznych, przechodnich i równoważnościowych relacjach.

Zwroty modyfikujące znaczenie. W języku naturalnym często posługujemy się zwrotami modyfikującymi znaczenie, na przykład w zwrocie „wesołe towarzystwo” znaczenie rzeczownika „towarzystwo” jest modyfikowane przez przymiotnik „wesołe”, a w zwrocie „bardzo wesołe towarzystwo” znaczenie tego przymiotnika ulega dalszej modyfikacji. Podobnie funkcjonują imiesłowy. Formalizacja tego typu zbitek wymaga ustalenia dokładnej relacji między znaczeniami poszczególnych wyrazów.

W najprostszych wypadkach mamy do czynienia ze zwykłą koniunkcją, na przykład wyrażenie „a jest czerwonym mercedesem” znaczy tyle, co „a jest czerwone i a jest mercedesem”, zaś wyrażenie „a jest czerwoną różą” znaczy tyle, co „a jest czerwone i a jest różą”. Formalizując te wyrażenia, można posłużyć się trzema predykatami: „C”, „M” i „R”, kolejno dla czerwonego, mercedesa i róży:

$$C(a) \land M(a), \quad C(a) \land R(a).$$

Nie możemy sobie na taki zabieg pozwolić, formalizując wyrażenie „a jest najwyższym budynkiem”, które nie znaczy tyle samo, co wyrażenie „a jest najwyższe i a jest budynkiem”, ale raczej tyle, co wyrażenie „a jest budynkiem i a jest najwyższe wśród budynków”. Podobnie wyrażenie „a jest najwyższym człowiekiem” nie znaczy tyle samo, co wyrażenie „a jest najwyższe i a jest człowiekiem", ale raczej tyle, co wyrażenie „a jest człowiekiem i a jest najwyższe wśród ludzi". Formalizacją

tych wyrażeń nie mogą być więc schematy:

$$B(a) \wedge N(a), \quad C(a) \wedge N(a),$$

w których predykaty „B", „C" i „N" znaczą kolejno tyle, co „jest budynkiem", „jest człowiekiem" i „jest najwyższe". Potrzebne są raczej schematy:

$$B(a) \wedge N_B(a), \quad C(a) \wedge N_C(a),$$

w których predykaty „B", „C", „N_B" i „N_C" znaczą kolejno tyle, co „jest budynkiem", „jest człowiekiem", „jest najwyższe z budynków" i „jest najwyższe wśród ludzi". Wymagają one dwóch odrębnych predykatów dla wyrażenia bycia najwyższym wśród budynków i bycia najwyższym wśród ludzi. Wprowadzenie osobnych predykatów dla bycia budynkiem i dla bycia najwyższym wśród budynków jest potrzebne, ponieważ dzięki temu sam klasyczny rachunek zdań gwarantuje takie zależności, jak to, że

$$B(a) \wedge N_B(a) \vdash B(a),$$

czyli to, że wyrażenie „a jest budynkiem" wynika logicznie z wyrażenia „a jest najwyższym budynkiem".

Zaimki względne. Analogiczna trudność i analogiczne rozróżnienia dotyczą zdań podrzędnych, wprowadzanych przez zaimki względne. Na przykład zdanie „człowiek, który jest stworzony na podobieństwo Boga, ma niezbywalne prawo do szacunku" może znaczyć, że każdy człowiek jest stworzony na podobieństwo Boga i (wobec tego) ma prawo do szacunku. Może być ono wówczas sformalizowane za pomocą schematu:

$$\forall x\colon (C(x) \to B(x) \wedge S(x))$$

lub nawet

$$\forall x\colon (C(x) \to B(x)) \wedge \forall x\colon (C(x) \to S(x)),$$

w którym wyrażenia: „$C(x)$", „$B(x)$" i „$S(x)$" znaczą kolejno, że x jest człowiekiem, x jest stworzony na podoieństwo Boga i że x ma prawo do szacunku. To samo zdanie języka naturalnego może wszakże znaczyć, że niektórzy — niekoniecznie wszyscy — ludzie są stworzeni na podobieństwo Boga, a prawo do szacunku przysługuje tym, którzy ten warunek spełniają. Mamy wówczas schemat:

$$\forall x\colon (C(x) \wedge B(x) \to S(x)),$$

o podobnie, jak poprzednio, rozumianych predykatach. Formalizacja wymaga więc znowu wmyślenia się w intencje autora wypowiedzi. Zaimek względny może uzupełniać informację lub zawężać zakres rozważanych przedmiotów.

Formalizacja wyrażeń zawierających zaimki względne wymaga uwagi z jeszcze jednego powodu. Otóż w logice pierwszego rzędu zaimek względny niemal zawsze musi wskazywać na jakiś podmiot logiczny. Z tego powodu trzeba nieraz wprowadzać dodatkowe argumenty predykatów, niedostrzegalne w języku naturalnym. Weźmy przykładowo pod uwagę następujący fragment Biblii: „ci, którzy nie wzywają Boga, tam zadrżą ze starchu, gdzie bać się nie ma czego" (Psalm 53). Zaimek „który" odnosi się do widocznego podmiotu „ci", ale zaimek „gdzie" wymaga sztucznego wprowadzenia dodatkowego podmiotu. Jeśli więc użyjemy litery „b", jako nazwy Boga, i predykatów: „$M(x, y)$" — x modli się do y, „$S(x)$" — x drży ze strachu, „$Z(x)$" — x jest realnie zagrożony, to nie zdołamy sformalizować badanego tekstu Biblii. Przytoczone zdanie znaczy bowiem coś innego niż to, że

$$\forall x\colon (\neg M(x, b) \to \neg Z(x) \wedge S(x)),$$

czyli że ci, którzy się nie modlą, przeżywają strach i nie są zagrożeni. Stąd bowiem wynikałoby, że ci, którzy się nie modlą, zawsze się boją, a nigdy nie są zagrożeni. Zaimek „gdzie" dodatkowo łączy bowiem predykaty „S" i „Z" wskazując na sytuacje, w których mają one zastosowanie. Potrzebny jest więc dodatkowy podmiot, dodatkowy argument tych predykatów. Przyjmijmy więc, że wyrażenie „$S(x, y)$" znaczy, że x drży ze strachu w sytuacji y, a wyrażenie „$Z(x, y)$" znaczy, że x jest realnie zagrożony w sytuacji y. Możemy wówczas dokładnie oddać sens badanego zdania, a zarazem pokazać jego dwuznaczność. Może ono bowiem znaczyć, że

$$\forall x\colon (\neg M(x, b) \to \exists y\colon (\neg Z(x, y) \wedge S(x, y)))$$

lub że

$$\forall x\colon (\neg M(x, b) \to \forall y\colon (\neg Z(x, y) \to S(x, y))).$$

W pierwszej — chyba najbardziej prawdopodobnej — wersji tekstu ci, którzy się nie modlą, mogą się spodziewać, że kiedyś, co najmniej raz, opadnie ich strach bez powodu. W drugiej wersji będą się bali zawsze, ilekroć nic im nie będzie zagrażać.

3.2 Interpretacje w logice pierwszego rzędu

Interpretacja wewnętrzna. W logice pierwszego rzędu przyznajemy wartość logiczną wyłącznie wyrażeniom domkniętym, to znaczy takim, które nie zawierają żadnych zmiennych wolnych. Omówimy podstawowe pojęcie interpretacji dla takich wyrażeń. O wyrażeniach otwartych powiemy osobno w dalszej części wykładu.

Aby uzyskać podstawowe pojęcie interpretacji w logice pierwszego rzędu, zamiast definicji 1 interpretacji litery zdaniowej, przyjmujemy następującą, ogólniejszą definicję zbioru dowolnych liter schematycznych.

Definicja 19 *Niech będzie dany dowolny zbiór liter schematycznych, zawierający co najmniej jedną literę nazwową i co najmniej jedną literę predykatową.Interpretacja tego zbioru liter polega na przyporządkowaniu dokładnie jednej wartości logicznej: prawdy lub fałszu każdemu wyrażeniu atomicznemu zbudowanemu wyłącznie z tych liter schematycznych i ewentualnie znaków interpunkcyjnych.*

Rozważmy dla przykładu zbiór, do którego należą dwie litery zdaniowe: „p” i „q”, jednoargumentowy predykat „P”, dwuargumentowy predykat „R” i trzy litery nazwowe: „a”, „b”, „c”. Interpretacja tego zbioru liter schematycznych polega na dowolnym określeniu wartości logicznej następujących wyrażeń atomicznych: „p”, „q”, „$P(a)$”, „$P(b)$”, „$P(c)$”, „$R(a,a)$”, „$R(b,b)$”, „$R(c,c)$”, „$R(a,b)$”, „$R(b,a)$”, „$R(a,c)$”, „$R(c,a)$”, „$R(b,c)$”, „$R(c,b)$”. Jeżeli interpretacja dotyczy tylko niektórych liter schematycznych, to wyrażenia zawierające inne litery są w tej interpretacji traktowane jako nieistniejące — nie wolno ich używać ani rozpatrywać.

Definicja 2 obowiązuje bez zmian, ale z jednym ważnym zastrzeżeniem. Minowicie, jeśli w podlegającym interpretacji zbiorze liter schematycznych jest co najmniej jeden predykat, a nie ma liter nazwowych, to należy do tego zbioru *dodać* co najmniej jedną literę nazwową. Łatwo jest bowiem przekonać się, że bez liter nazwowych nie można zbudować domkniętego wyrażenia atomicznego innego niż pojedyńcza litera zdaniowa. Jeśli więc, przykładowo, konstruujemy interpretację wyrażenia „$\exists x\colon (P(x) \vee Q(x))$”, to nie wystarczy interpretowanie występujących w tym wyrażeniu liter predykatowych : „P” i „Q”. Trzeba dodać do nich co najmniej jedną literę nazwową, na przykład „a”, i zastosować definicję 19 do zbioru tych trzech liter, to znaczy, określić wartość logiczną co najmniej wyrażeń: „$P(a)$” oraz „$Q(a)$”. Z resztą nic nie stoi na przeszkodzie temu, by rozważać więcej dodatkowych liter nazwowych — stąd w definicji 2 bierze się zwrot „co najmniej” — wszakże jedna litera nazwowa jest obowiązkowa.

Zbiór wszystkich liter nazwowych, które są brane pod uwagę w danej uproszczonej interpretacji, jest określany jako *uniwersum dyskursu*, lub skrótowo *uniwersum*. Wymiennie nazywamy uniwersum dyskursu zbiór domniemanych desygnatów tych liter nazwowych. Możemy więc dowolnie powiedzieć, na przykład, że uniwersum pewnej interpretacji stanowią schematyczne nazwy: „*a*”, „*b*” i „*c*” lub że stanowią je przedmioty: a, b i c. Jeśli więc posługujemy się choćby jednym predykatem, to uniwersum nie może być puste.

Na tablicy 3.2 przedstawiamy przykładowe interpretacje trzech liter nazwowych: „*a*”, „*b*” i „*c*” oraz dwuargumentowego predykatu „*P*”. Ideowo

	Paa	Pab	Pac	Pba	Pbb	Pbc	Pca	Pcb	Pcc
V_1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
V_2	1	1	1	0	1	1	0	0	1

Tablica 3.2: Przykłady interpretacji

chodzi o to, że wyrażenie $\ulcorner P(\alpha, \beta)\urcorner$ w interpretacji V_1 ma znaczyć, że α kocha β, a ma być Izoldą, b Tristanem, a c Markiem. Natomiast w interpretacji V_2 a jest liczbą 1, b liczbą 2, a c liczbą 3, podczas gdy wyrażenie $\ulcorner P(\alpha, \beta)$ znaczy, że $\alpha \leqslant \beta$.

Odnośnie do wartości logicznych wyrażeń złożonych przyjmujemy bez zmian definicje 3–7 z klasycznego rachunku zdań oraz następujące definicje dla kwantyfikatorów. Niech $\mathcal{A}$ będzie wyrażeniem, które zawiera co najwyżej jedną zmienną wolną α, zaś β niech będzie dowolną literą nazwową.

Definicja 20 (kwantyfikator ogólny) *Wyrażenie* $\ulcorner\forall\alpha\colon \mathcal{A}\urcorner$ *jest prawdą w interpretacji* V *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej litery nazwowej* β *wyrażenie* $\mathcal{A}(\alpha/\beta)$ *jest prawdą w tej interpretacji* V.

Definicja 21 (kwantyfikator szczegółowy) *Wyrażenie* $\ulcorner\exists\alpha\colon \mathcal{A}\urcorner$ *jest prawdą w interpretacji* V *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka litera nazwowa* β*, że wyrażenie* $\mathcal{A}(\alpha/\beta)$ *jest prawdą w tej interpretacji* V.

Sens tych definicji jest taki, że kwantyfikator ogólny wyraża możliwość podstawienia za wchodzącą w grę zmienną dowolnej nazwy, a kwantyfikator szczegółowy co najmniej jednej nazwy. Określmy przykładowo interpretację V liter: „*P*”, „*a*”, „*b*” tak, że $V(Pab) = V(Paa) = 1$, a pozostałe wyrażenia atomiczne zbudowane z tych liter są fałszywe w tej interpretacji. Wówczas $V(\exists x\colon Pax) = 1$, a $V(\exists x\colon Pbx) = 0$, a także $V(\forall x\colon Pax) = 1$, a $V(\forall x\colon Pxa) = 0$.

Definicje wynikania, sprzeczności i równoważności, a także definicje tautologii i antylogii przejmujemy bez zmian z klasycznego rachunku zdań.

Kwantyfikatory na drzewach analitycznych. Wszystkie zasady konstrukcji drzewa i wszystkie reguły analityczne, którymi kierowaliśmy się w klasycznym rachunku zdań pozostają w mocy. Ponadto wprowadzamy cztery reguły dla kwantyfikatorów.

W dwóch regułach analitycznych, charakteryzujących kwantyfikatory, występuje znany nam z teorii funktorów prawdziwościowych znak $\surd$. Te reguły stosujemy tylko raz, a objęte nimi wyrażenia stają się martwe. W dwóch pozostałych regułach wystąpi znak $*$. Te reguły będzie można stosować wielokrotnie, a objęte nimi wyrażenia nie muszą od razu stawać się martwe. Reguły, w których występuje znak $*$, nazywamy regułami *powtarzalnymi* przeciwstajwiając je regułom *niepowtarzalnym*, w których występuje znak $\surd$. Pierwsza reguła dotyczy determinacji szczegółowej.

Reguła S:
$$\begin{array}{l} \surd\, \exists\alpha\colon \mathcal{A} \\ \quad\ | \\ \mathcal{A}(\alpha/\beta) \end{array}$$
β jest nazwą, która jeszcze nie wystąpiła na tej gałęzi

Skoro uznajemy za prawdziwe wyrażenie o postaci $\ulcorner\exists\alpha\colon \mathcal{A}\urcorner$, to na mocy definicji kwantyfikatora szczegółowego wiemy, że co najmniej jedno wyrażenie o postaci $\mathcal{A}(\alpha/\beta)$ jest prawdziwe, ale nie musimy wiedzieć, które. Dlatego wprowadzamy nową nazwę, która jeszcze nie wystąpiła na gałęzi. O desygnacie tej nazwy wiemy bowiem, że spełnia on wyrażenie $\mathcal{A}$ i nic więcej. Podobnie czynimy w języku naturalnym, na przykład, mówiąc, że ktoś w naszej grupie jest zdrajcą. Dopóki nie wiemy, kto to jest, nie możemy jednak posługiwać się jego imieniem. Wprowadzamy więc specjalny wyraz „kret", „ten zdrajca" lub podobny. Mówiąc „ktoś z nas jest zdrajcą, ten kret przekazuje naszą korespondencję Okupantowi", stosujemy regułę podobną do S. Jest to reguła niepowtarzalna. Kolejna reguła, tym razem powtarzalna, dotyczy zaprzeczenia determinacji szczegółowej.

Reguła NS:
$$\begin{array}{l} *\, \neg\exists\alpha\colon \mathcal{A} \\ \quad\ \ | \\ \neg\mathcal{A}(\alpha/\beta) \end{array}$$
β może być dowolną nazwą

Skoro bowiem żadne wyrażenie o postaci $\mathcal{A}(\alpha/\beta)$ nie jest prawdziwe, to β może być dowolną nazwą. Jest to reguła powtarzalna. Znak $*$ przypomina, że wolno ją stosować wielokrotnie do tego samego wyrażenia. Możemy bowiem chcieć stwierdzić, że zdanie o wskazanym kształcie jest fałszywe dla różnych nazw β. Oznaczone znakiem $*$ wyrażenie staje się martwe dopiero po podstawieniu za α wszystkich nazw, które występują na gałęzi. To uśmiercenie i tak bywa tymczasowe, ponieważ stosowanie innych reguł może wprowadzić na gałąź nowe nazwy, co natychmiast ożywia wyrażenie. Mamy więc raczej do czynienia z jakimś uśpieniem, co najwyżej ze śpiączką, niż z faktycznym uśmierceniem wyrażenia. Kolejna, również powtarzalna, reguła dotyczy determinacji ogólnej.

$$\text{Reguła } \mathsf{O}: \quad \begin{array}{l} * \, \forall\alpha \colon \mathcal{A} \\ \quad\quad | \\ \mathcal{A}(\alpha/\beta) \\ \beta \text{ może być dowolną nazwą} \end{array}$$

Skoro $\mathcal{A}$ zachodzi dla każdego α, to zachodzi niezależnie od tego, jaką nazę podstawimy za tę zmienną. Ostatnia reguła dotycząca kwantyfikatorów jest niepowtarzalna.

$$\text{Reguła } \mathsf{NO}: \quad \begin{array}{l} \surd \, \neg\forall\alpha \colon \mathcal{A} \\ \quad\quad | \\ \neg\mathcal{A}(\alpha/\beta) \\ \beta \text{ jest nazwą, która jeszcze nie wystąpiła na tej gałęzi} \end{array}$$

Aby wyrażenie zbudowane za pomocą kwantyfikatora ogólnego było fałszywe, wystarczy jedna nazwa, której podstawienie za α daje fałsz. Musi to być jednak nazwa nowa na gałęzi, a to z tych samych powodów, dla których żądaliśmy nowej nazwy, formułując regułe S.

Sformułujemy obecnie uwagi praktyczne, przejmując pewne z nich z klasycznego rachunku zdań i wprowadzając pewne nowe wskazówki:

- na gałęziach wolno umieszczać wyłącznie wyrażenia domknięte;
- należy zamykać gałąź tak szybko, jak to możliwe;
- należy unikać rozgałęzienia tak długo, jak to możliwe;
- należy stosować reguły niepowtarzalne przed regułami powtarzalnymi;
- nie należy wprowadzać nowych nazw, jeśli nie jest to konieczne;
- warto i należy stosować reguły powtarzalne tak długo, jak długo nie wyczerpie się wszystkich nazw, które już występują na danej gałęzi;
- jeżeli na danej gałęzi nie występują żadne nazwy, to należy mimo to zastosować regułę powtarzalną, wprowadzając nową nazwę.

Zwróćmy uwagę na pierwszą zasadę: na drzewach analitycznych wolno umieszczać wyłącznie wyrażenia domknięte. Wobec tego przed analizą wyrażenia otwartego należy bądź podstawić nazwy za wszystkie zmienne wolne tego wyrażenia, bądź związać wszystkie zmienne wolne właściwymi kwantyfikatorami. Zwykle zmienna wolna twierdzenia winna być związana kwantyfikatorem ogólnym występującym na początku wyrażenia. Ostatecznie jednak sami decydujemy, jak chcemy dane wyrażenie rozumieć.

Przykłady użycia reguł powtarzalnych. Niekiedy do zamknięcia drzewa wystarczy jednokrotne zastosowanie reguł powtarzalnych. Pokażemy, że

$$\exists x\colon (P(x) \land Q(x)), \forall x\colon (Q(x) \to R(x)), \vdash \exists x\colon (P(x) \land R(x)),$$

czyli, na przykład, ze zdań: „niektórzy logicy są matematykami" i „każdy matematyk jest roztargniony" wynika zdanie „niektórzy logicy są roztargnieni". Rozwijając drzewa, często korzystamy z umowy zezwalającej na opuszczanie nawiasów i przecinków związanych z argumentami predykatów.

$$\begin{array}{l}
\surd\ \exists x\colon (Px \land Qx) \\
*\ \forall x\colon (Qx \to Rx) \\
*\ \neg\exists x\colon (Px \land Rx) \\
\qquad \surd\ Pa \land Qa \\
\qquad\qquad Pa \\
\qquad\qquad Qa \\
\qquad \surd\ Qa \to Ra \\
\qquad \surd\ \neg(Pa \land Ra)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\neg Qa & & Ra \\
\otimes & \neg Pa & & \neg Ra \\
 & \otimes & & \otimes
\end{array}$$

W innych wypadkach reguły te należy zastosować więcej niż raz. Pokażemy, że

$$\forall x\colon (P(x) \to \neg\forall y\colon Q(y,x)), \exists x\colon Z(x), \vdash \exists x\colon \neg\forall y\colon Q(y,x),$$

czyli na przykład ze zdań: „żaden zwierzchnik nie jest lubiany przez wszystkich" oraz „ktoś jest zwierzchnikiem" wynika zdanie „jest ktoś, kto nie jest przez wszystkich lubiany".

$$
\begin{array}{c}
* \ \forall x\colon (Px \to \neg\forall y\colon Qyx)\\
\surd\ \exists x\colon Px\\
* \ \neg\exists x\colon \neg\forall y\colon Qyx\\
Pa\\
\surd\ \neg\neg\forall y\colon Qya\\
* \ \forall y\colon Qya\\
Qaa\\
\surd\ Pa \to \neg\forall y\colon Qya\\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash\\
\neg Pa & \neg\forall y\colon Qya\\
\otimes & \neg Qba\\
 & Qba\\
 & \otimes
\end{array}
\end{array}
$$

Zauważmy, że do szóstego wiersza dwukrotnie zastosowaliśmy regułę O. Za pierwszym razem uzyskaliśmy w siódmym wierszu wyrażenie „$Q(a, a)$”. Drugi raz zastosowaliśmy regułę O do wiersza szóstego, uzyskując w wierszu dziesiątym drugiej gałęzi wyrażenie „$Q(b, a)$”. Na tym właśnie polega powtarzalność reguł. Gdybyśmy wszystkie reguły traktowali jako niepowtarzalne — jak to czyniliśmy wcześniej — nie moglibyśmy doprowadzić do zamknięcia drugiej gałęzi po uzyskaniu wiersza siódmego.

Wynik działania może zależeć od tego, czy — używając reguł powtarzalnych — wprowadziliśmy właściwą nazwę. Niekiedy, rozwijając drzewo, musimy cofnąć się do wyrażenia oznaczonego już znakiem $*$. Pokażemy, że

$$\exists x\colon \forall y\colon P(x, y) \vdash \forall y\colon \exists x\colon P(x, y), \tag{3.11}$$

czyli, na przykład, ze zdania „istnieje wspólna przyczyna wszystkich zdarzeń” wynika logicznie zdanie „każde zdarzenie ma przyczynę”.

$$
\begin{array}{c}
\surd\ \exists x\colon \forall y\colon Pxy\\
\surd\ \neg\forall y\colon \exists x\colon Pxy\\
* \ \forall y\colon Pay\\
* \ \neg\exists x\colon Pxb\\
Pab\\
\neg Pab\\
\otimes
\end{array}
$$

Gdybyśmy źle dobrali nazwy, stosując reguły O i NS w wierszu trzecim i czwartym, uzyskalibyśmy ten sam wynik, ale musielibyśmy wielokrotnie stosować reguły powtarzalne. Pokazuje to kolejny przykład.

$\surd\ \exists x\colon \forall y\colon Pxy$

$\surd\ \neg\forall y\colon \exists x\colon Pxy$

$*\ \forall y\colon Pay$

$*\ \neg\exists x\colon Pxb$

Paa

Pab

$\neg Pbb$

$\neg Pab$

$\otimes$

Nie wolno uznać otwartej gałęzi za zakończoną, dopóki nie zostały wyczerpane wszystkie możliwości stosowania reguł powtarzalnych. Dopiero kiedy wszystkie nazwy, występujące na gałęzi, zostaną użyte w ramach zastosowania reguły powtarzalnej do pewnego wyrażenia, wolno uznać to wyrażenie za martwe. Dopiero wtedy, gdy wszystkie możliwości podstawiania zostały na danej gałęzi wyczerpane, wolno i należy uznać tę gałąź za zakończoną, nawet jeśli jest otwarta. Pokażemy więc, że

$$\forall x\colon (P(x) \vee Q(x)), \neg\forall x\colon P(x) \nvdash \forall x\colon Q(x), \tag{3.12}$$

a więc ze zdań: „każdy jest mężczyzną lub kobietą”, „nie każdy jest mężczyzną” nie wynika logicznie zdanie „każdy jest kobietą”.

$*\ \forall x\colon (Px \vee Qx)$

$\surd\ \neg\forall x\colon Px$

$\surd\ \neg\forall x\colon Qx$

$\neg Pa$

$\neg Qb$

$\surd\ Pa \vee Qa$

$Pa \qquad Qa$

$\otimes \qquad \surd\ Pb \vee Qb$

$Pb \qquad Qb$

$\odot \qquad \otimes$

W tym wypadku wolno nam uznać drugą gałąź za zakończoną. Na tej gałęzi występują bowiem dwie nazwy: „a" i „b". Stosując do wiersza pierwszego na tej gałęzi powtarzalną regułę $\mathtt{O}$, użyliśmy obu tych nazw: uzywając nazwy „a", uzyskaliśmy wiersz szósty, a używając nazwy „b", uzyskaliśmy wiersz ósmy na drugiej gałęzi. Stosowanie innych nazw na tej gałęzi, zgodnie z naszymi uwagami, jest bezcelowe.

Odczytywanie interpretacji z drzew. Ponieważ druga gałąź ostatniego drzewa jest zakończona i otwarta, nadaje się do odczytania interpretacji stanowiącej model semantyczny wyrażeń występujących w korzeniu, a więc zarazem kontrprzykład dla domniemanego wynikania. Do odczytania interpretacji w logice pierwszego rzędu wolno przystąpić dopiero po upewnieniu się, że wyczerpano możliwości stosowania reguł powtarzalnych z zastosowaniem wszystkich nazw występujących na danej gałęzi. Otóż — analogicznie do klasycznego rachunku zdań — poszukujemy takiej interpretacji V, że prawdziwe w niej są wszystkie wyrażenia proste, które występują na badanej gałęzi, i faałszywe w niej są wszystkie wyrażenia proste, których negacje występują na tej gałęzi. Zatem każda taka interpretacja V, że

$$\begin{aligned} &V(Pb) = V(Qa) = \mathtt{1}, \\ &V(Pa) = V(Qb) = \mathtt{0} \end{aligned} \tag{3.13}$$

jest kontrmodelem reguły (3.12). Obydwie przesłanki tej reguły są prawdziwe w tej interpretacji, a wniosek jest w niej fałszywy. Przekonajmy się o tym.

Uniwersum interpretacji V składa się z dwóch przedmiotów: a i b. Zacznijmy od pierwszej przesłanki reguły inferencyjnej (3.12) . Ponieważ $V(Pb) = \mathtt{1}$, również $V(Pb \vee Qb) = \mathtt{1}$. Ponieważ $V(Qa) = \mathtt{1}$, również $V(Pa \vee Qa) = \mathtt{1}$. Zatem przy każdym prwidłowym podstawieniu wyrażenie „$Px \vee Qx$" okazuje się prawdziwe, a więc wedle definicji 20 $V(\forall x\colon (Px \vee Qx)) = \mathtt{1}$. Odnośnie do drugiej przesłanki, skoro $V(Pa) = \mathtt{0}$, również $V(\forall x\colon Px) = \mathtt{0}$, a więc $V(\neg\forall x\colon Px) = \mathtt{1}$. Odnośnie zaś do konkluzji reguły inferencyjnej (3.12), skoro $V(Qb) = \mathtt{0}$, również $V(\forall x\colon Qx) = \mathtt{0}$. Widać więc, że interpretacja V jest faktycznie kontrmodelem reguły inferencyjnej (3.12).

Drzewa nieskończone. Niekiedy jednak nie da się wyczerpać możliwości podstawiania, a tym samym nie można w żaden sposób zakończyć gałęzi. Przekonamy się o tym, usiłując wykazać, że

$$\forall x\colon \exists y\colon P(x,y) \nvDash \exists y\colon \forall x\colon P(x,y), \tag{3.14}$$

to znaczy, zależność odwrotna do (3.11) nie zachodzi. Warto przy okazji wiedzieć, że według niektórych filozofów Tomasz z Akwinu popełnił w jednym ze swych dowodów na istnienie Boga błąd *non sequitur*, dopatrując się wynikania logicznego w zależności (3.14). Miałby on mianowicie stąd, że każde zdarzenie ma przyczynę, wnioskować, że istnieje wspólna przyczyna wszystkich zdarzeń.

$$
\begin{array}{l}
* \ \forall x\colon \exists y\colon Pxy \\
* \ \neg\exists y\colon \forall x\colon Pxy \\
\surd \ \exists y\colon Pay \\
\quad Pab \\
\surd \ \neg\forall x\colon Pxb \\
\quad \neg Pcb \\
\surd \ \exists y\colon Pby \\
\quad Pbc \\
\surd \ \neg\forall x\colon Pxc \\
\quad \neg Pdc \\
\surd \ \exists y\colon Pdy \\
\quad Pde \\
\surd \ \neg\forall x\colon Pxe \\
\quad \neg Pfe \\
\quad \vdots
\end{array}
$$

Ta procedura nigdy się nie kończy, ponieważ każdorazowe zastosowanie którejś z reguł powtarzalnych otwiera nową możliwość zastosowania reguły niepowtarzalnej i — w konsekwencji — zmusza do wprowadzenia nowej nazwy. Wprowadzenie nowej nazwy oznacza natomiast nową możliwość zastosowania reguły powtarzalnej. Nie ma sposobu na przerwanie tego zaklętego kręgu.

Zasygnalizowany problem nie wiąże się tylko z techniką drzew i nie można go usunąć. Alonzo Church udowodnił w 1936 r., że logika pierwszego rzędu jest *nierozstrzygalna*, to znaczy, nigdy nie będzie mógł powstać algorytm rozwiązywania problemów w ramach tej logiki. Należy ponadto mieć świadomość, że — w odróżnieniu od klasycznego rachunku zdań — w logice pierwszego rzędu drzewa analityczne nie specyfikują wszystkich modeli zadanego zbioru wyrażeń, a nawet nie muszą specyfikować modeli najprostszych. Może być m.in. tak, że drzewo nie kończy się, mimo że istnieje model o skończonym uniwersum.

3.3 Rozszerzenia i uzupełnienia

Interpretacja arytmetyczna. W sytuacjach, w których uniwersum jest liczne, a ponadto posługujemy się większą liczbą predykatów, korzystanie z podstawowego sposobu konstruowania interpretacji, określonego w definicji 19, staje się bardzo żmudne. Wtedy zaś, gdy uniwersum jest nieskończone — jak, na prykład, w wypadku reguły (3.14) — jest niewykonalne. Nie można bowiem w żaden sposób wyliczyć nieskończenie wielu wyrażeń wraz z ich wartościami logicznymi. Sposobem radzenia sobie z tą trudnością może być *interpretacja arytmetyczna* logiki pierwszego rzędu.

Aby skonstruować interpretację arytmetyczną, do zbioru schematycznych liter nazwowych dołączamy nazwy wszystkich liczb naturalnych: „0”, „1”, „2”, „3” itd. Te nazwy liczb naturalnych określamy jako liczebniki i przyjmujemy, że każdej liczbie naturalnej odpowiada dokładnie jeden liczebnik. Jeśli nie zastrzegamy nic innego, to uniwersum stanowi zbiór wszystkich liczb naturalnych. Można ograniczyć uniwersum arytmetycznej interpretacji do wszystkich liczb naturalnych począwszy od pewnej, dowolnie wybranej liczby. Często uniwersum bywa ograniczane do zbioru wszystkich liczb naturalnych począwszy od 1.

Przyjmiemy jeszcze, że w metajęzyku można na liczebnikach przeprowadzać operacje analogiczne do arytmetycznych operacji na liczbach naturalnych. Jeśli więc, np. α jest liczebikiem „5”, to $\alpha + 1$ jest liczebnikiem „6” itp.

Następnie, zgodnie z definicją 19, określamy wartości logiczne wszystkich domkniętych wyrażeń atomicznych, zbudowanych z wchodzących w grę predykatów, nazw liczb naturalnych i znaków interpunkcyjnych. Zamiast więc określać wartość logiczną wyrażenia „$P(a, b)$”, określamy wartości takich wyrażeń, jak „$P(2, 5)$”, „$Q(6)$” i „$R(9, 3645, 5)$”. Tutaj właśnie pojawia się możliwość łatwego poradzenia sobie z licznymi, nawet nieskończonymi uniwersami. Nie musimy bowiem — choć możemy — wyliczać wszystkich odnośnych wyrażeń atomicznych. Wystarczy przecież określić warunek, który dany zestaw liczb winien spełniać, by wyrażenie, w którego skład chodzi, było prawdziwe. Jeśli, na przykład, przyjmiemy, że

$$V(Qxyz) = 1 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x + y = z,$$

to automatycznie wiemy, że

$$V(Q(1, 2, 3)) = V(Q(6, 28, 34)) = V(Q(5, 2, 7)) = V(Q(0, 0, 0)) = \mathtt{1},$$
$$V(Q(2, 2, 2)) = V(Q(5, 3, 4)) = V(Q(1, 19, 19)) = V(Q(9, 7, 5)) = \mathtt{0}$$

i tak dalej, dla dowolnego wyrażenia rozpatrywanego typu. Podkreślmy od razu, że należy wyraźnie odróżniać znaki „1” i „0”, będące nazwami liczb naturalnych, od znaków „1” i „0”, które są nazwami wartości logicznych. Na szczęście kontekst zawsze nieomylnie wskazuje na sens znaku. Zaznaczmy też, że — wobec istnienia wielocyfrowych liczeników — nie wolno w tym wypadku opuszczać przecinków oddzielających argumenty predykatów.

Nie zmienia się sposób interpretowania liter zdaniowych, którym nadal przyporządkowujemy po prostu dowolne wartości logiczne. Natomiast zwykłe litery nazwowe, takie jak „*a*”, „*b*” i „*c*”, interpretujemy, w razie potrzeby, utożsamiając je z wybranymi liczebnikami, na przykład

$$V(a) = V(10), \quad V(b) = V(25).$$

To przyporządkowanie nie musi być jednoznaczne, to znaczy interpretacja

$$V(a) = V(b) = V(c) = V(10)$$

i podobne interpretacje są dozwolone. Natomiast nie wolno nigdy utożsamić ze sobą różnych liczebików, na przykład interpretacja $V(5) = V(7)$ jest zawsze zabroniona.

Dla przykładu wróćmy do zależności (3.14). Można skonstruować następującą interpretację arytmetyczną:

$$V(P(x, y)) = \mathtt{1} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x < y. \tag{3.15}$$

Przesłanka „$\forall x\colon \exists y\colon P(x, y)$” jest prawdą w interpretacji V wtedy i tylko wtedy dla każdej liczby naturalnej x można podać liczbę naturalną y większą od x. Faktycznie tak jest, dla każdej bowiem liczby naturalnej x liczba $x + 1$ sama jest liczbą naturalną i jest większa od x. Natomiast wniosek „$\exists y\colon \forall x\colon P(x, y)$” jest w interpretacji V prawdziwy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna y, która jest większa od każdej liczby naturalnej x. Tak jednak nie jest, ponieważ żadna liczba naturalna nie jest większa od samej siebie.

Znak równości (identyczności). Aby użyć techniki drzew analitycznych do znaku równości, należy przyjąć wszystkie reguły analityczne klasycznego rachunku zdań i wszystkie reguły analityczne odnoszące się do kwantyfikatorów. Ponadto jedną nową, powtarzalną regułę odnoszącą się do znaku równości. W tej następującej regule α i β są dowolnymi termami.

$$\text{Reguła } \mathsf{EQ}\colon \quad \begin{array}{l} *\,\alpha = \beta \\ \mathcal{A} \\ \mathcal{A}(\alpha \,\|\, \beta) \end{array}$$

Zgodnie z regułą EQ na gałęzi, na której występują *obydwa* wyrażenia: $\mathcal{A}$, $\ulcorner\alpha = \beta\urcorner$, wolno umieścić wyrażenie $\mathcal{A}(\alpha \parallel \beta)$, które powstaje z $\mathcal{A}$ przez zastąpienie termu α termem β. Zastąpienie różni się od podstawienia tym, że nie musi być jednorodne, to znaczy, wolno dokonać go na jednym, na dowolnych niektórych lub na wszystkich miejscach wystąpienia termu α.

Ponadto należy zmodyfikaować zasady uznawania gałęzi za zamkniętą. Dotychczas zamknięcie gałęzi następowało w razie pojawienia się na niej pary wyrażeń: $\mathcal{A}$, $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ i tylko wtedy. Po wprowadzeniu znaku równości gałąź, na której występuje taka para wyrażeń nadal ulega zamknięciu. Ponadto zamknięta ma być gałąź, na której występuje wyrażenie

$$\alpha \neq \alpha,$$

czyli $\ulcorner\neg(\alpha = \alpha)\urcorner$, dla dowolnego termu α. Konstruując interpretację na podstawie otwartej, ale zakończonej, gałęzi, postępujemy podobnie, jak do tej pory, z tym zastrzeżeniem, że dla dowolnego wyrażenia $\ulcorner\alpha = \beta\urcorner$ na danej gałęzi respektujemy ograniczenie: $V(\alpha) = V(\beta)$. Zatem stronom występującej na gałęzi równości przyporządkowujemy ten sam desygnat.

Operatory. W podstawowym alfabecie logiki pierwszego rzędu (s. 81) występują dwa rodzaje termów: zmienne indywidualne i schematyczne litery nazwowe. Do niektórych celów bardzo przydatne jest wzbogacenie tego zasobu o termy złożone, budowane za pomocą *operatorów*.

Przez n-argumentowy operator rozumiemy taki symbol, który wraz z n argumentami, którymi są nazwy jednostkowe, tworzy nazwę jednostkową. Operator różni się więc od predykatu tym, że tworzy nazwę, a nie zdanie.

Przyjrzyjmy się nazwom: „pierwszy król Polski", „pierwszy król Anglii". Powstają one ze zwrotu „pierwszy król x" przez podstawienie za zmienną „x" jednostkowej nazwy państwa. Po podstawieniu nazwy „Polska" powstaje złożona nazwa Bolesława Chrobrego, a po podstawieniu nazwy „Anglia" nazwa Alfreda Wielkiego. W tym kontekście zwrot „pierwszy król" jest jednoargumentowym operatorem. Weźmy jeszcze pod uwagę znak „+". Ze zwrotu „$x+y$", przez podstawienie kolejno nazw „3" i „19", powstaje nazwa jednostkowa „3+19", której desygnatem jest liczba 22, a przez podstawienie kolejno nazw „2" i „2" powstaje nazwa jednostkowa „2+2", której desygnatem jest liczba 4. Symbol „+" jest dwuargumentowym operatorem.

Jeśli przyjmuje się, że predykatom odpowiadają w rzeczywistości relacje, to za przedmiotowe odpowiedniki operatorów należy uznać operacje (działania), które każdemu dozwolonemu układowi przedmiotów przyporządkowują dokładnie jedną wartość, zwaną wynikiem działania.

Nazwy jednostkowe można traktować jako szczególny przypadek operatorów, mianowicie jako operatory zeroargumentowe.

Chcąc wzmocnić język logiki pierwszego rzędu o operatory, przyjmujemy, że schematyczne litery nazwowe „a", „b", „c", ..., są schematycznymi literami operacyjnymi i reprezentują dowolne n-argumentowe operatory, m.in. nazwy jednostkowe. Jeśli w danym kontekście litera reprezentuje operator, jego argumenty pojawią się w nawiasie, np. „$a(x)$", „$a(b,c)$", „$b(a,d(c))$". Rozszerzymy wówczas pojęcie termu. Przyjmiemy mianowicie, że zbiór termów jest to najmniejszy zbiór, który spełnia warunki:

- wszystkie zmienne indywidualne i litery nazwowe są termami,
- jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są termami, a δ jest n-argumentowym operatorem, to $\delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ też jest termem.

Przyjmujemy więc, podobnie jak w odniesieniu do predykatów, zwyczaj pisania operatora przed jego argumentami, np. „+(2,3)" zamiast „(2+3)". Czasem będziemy odchodzić od tego zwyczaju. Nie jest to w ogóle istotna sprawa.

Jeśli wzmocni się alfabet o operatory, to, stosując na drzewach analitycznych reguły powtarzalne, można wprowadzać termy złożone. Należy jedynie troskliwie przestrzegać zasad prawidłowego podstawienia. Natomiast, stosując reguły niepowtarzalne, należy zawsze wprowadzać nową literę nazwową, wyrażając w ten sposób brak jakichkolwiek dodatkowych informacji o desygnacie wprowadzanej nazwy. Wprowadzenie operatorów nie wymaga natomiast żadnych dodatkowych reguł analitycznych.

Pojęcie spełniania. Pojęcie spełniania jest rozszerzeniem pojęcie prawdy w tym sensie, że w odniesieniu do wyrażeń domkniętych jest po prostu tożsame z prawdziwością, ale daje się też stosować do wyrażeń otwartych. Intuicyjnie pojęcie spełniania jest powszechnie stosowane i łatwe do uchwycenia. Otwarte wyrażenie

x jest liczbą parzystą

nie jest samo w sobie ani prawdą, ani fałszem. Można natomiast powiedzieć, że to wyrażenie *jest spełnione* m.in. przez liczbę 4 i liczbę 12, a nie jest spełnione przez liczbę 9. Wyrażenie

x jest ojcem y,

o dwóch zmiennych wolnych, jest spełnione m.in. przez parę: Mieszko I, Bolesław Chrobry, a także przez parę: Bolesław Chrobry, Mieszko II, ale nie jest spełnione przez parę: Mieszko I, Bolesław Śmiały. Wyrażenia o trzech zmiennych wolnych są spełniane — lub nie — przez trójki przedmiotów itd. Ogólnie rzecz ujmując, wyrażenia są spełnione przez te układy przedmiotów, które są właśnie takie, jak głoszą te wyrażenia. Jest to dość klarowna intuicja, ale nie jest to precyzyjne określenie.

spełnia NAZWA a wtórnie wyrażenie

Aby udoskonalić pojęcie spełniania przyjmiemy najpierw, że dowolne wyrażenia są spełniane — lub nie — przez *nieskończone* ciągi przedmiotów należących do uniwersum dyskursu. Wyrazy w ciągach mogą się powtarzać. Jeżeli rozważane wyrażenie zawiera n zmiennych wolnych, to dla spełniania istotne jest n pierwszych wyrazów ciągu, dalsze wyrazy pozostają obojętne. Na przykład wyrażenie „$x \leqslant y$" jest spełnione przez nieskończony ciąg liczb naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy drugim wyrazem ciągu jest liczba naturalna większa lub równa liczbie będącej pierwszym wyrazem tego ciągu. Następnie możemy sformułować precyzyjną definicję spełniania. Niech $\mathcal{A}$ bedzie dowolnym wyrażeniem, w którym jedynymi zmiennymi wolnymi są: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ niech będą literami nazwowymi.

Nieprecyzyjnie mówiąc, wyrażenie $\mathcal{A}$ jest spełnione przez ciąg nazw wtedy i tylko wtedy, gdy po podstawieniu tych nazw kolejno za wszystkie zmienne wolne wyrażenia $\mathcal{A}$ powstaje wyrażenie prawdziwe. Dla uproszczenia przyjmujemy, że nazwy są ustawione w nieskończone ciągi, a wyrażenia są spełniane — lub nie — przez owe ciągi nazw. Podstawiamy przy tym pierwszy wyraz ciągu za pierwszą zmienną wolną, drugi wyraz ciągu za drugą zmienną wolną itd. do wyczerpania zmiennych wolnych. Dalsze nazwy w ciągu są obojętne.

Definicja 22 (spełnianie) *Wyrażenie $\mathcal{A}$, w którym $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są wszystkimi zmiennymi wolnymi, jest spełnione w interpretacji V przez nieskończony ciąg $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ nazw wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie*

$$\mathcal{A}(\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \ldots, \alpha_n/\beta_n)$$

jest prawdziwe w tej interpretacji V.

Analogicznie mówimy, że wyrażenie $\mathcal{A}$ są spełnione — lub nie — przez ciągi przedmiotów, które są desygnatami kolejnych nazw Analogicznie mówimy często, że wyrażenia są spełnione przez przedmioty będące desygnatami nazw, spełniających te wyrażenia, i ciągi takich przedmiotów.

nazwy - podpadają pod wyrażenie? desygnaty - spełniają wyrażenie?

Rozdział 4

Wprowadzenie do logik nieklasycznych

Ośrodkiem całej wiedzy logicznej w jej obecnym kształcie jest klasyczny rachunek logiczny. Budzi on jednak pewne wątpliwości, które skłaniają do poszukiwania innych rachunków pretendujących do miana logiki. Rachunki te określamy mianem *logik nieklasycznych*. Trzeba mocno wybić i podkreślić to, że pod względem matematycznym wszystkie logiki — klasyczna i nieklasyczne — są czyste, jak łza. Wątpliwości, zarzuty i cały spór dotyczą tego, która logika jest *miarodajna*, która stanowi wierne ujęcie prawdziwych związków logicznych. Być może, ten fakt najlepiej pokazuje, że — choć w logice obowiązkowo używa się matematyki — logika matematyką nie jest, bardziej niż matematykę przypomina fizykę.

4.1 Geneza logik nieklasycznych

Traktowanie logiki klasycznej jako miarodajnego ujęcia związków logicznych napotyka trudności. Podano bowiem wiele argumentów przemawiających przeciwko założeniom, na których opiera się klasyczna logika. Zapoznamy się z najważniejszymi i najbardziej charakterystycznymi spośród nich. Miarodajność logiki klasycznej bywa podważana najczęściej z uwagi na problem (a) anomalii prawdziwościowych, (b) relewancji lub (c) modalności. Powinniśmy przy tym pamiętać, że mamy do czynienia z kontrowersjami. Znaczy to, że w każdym wypadku dyskusja jest otwarta.

Między prawdą a fałszem. Najbardziej charakterystycznym założeniem logiki klasycznej jest zasada dwuwartościowości. Na pierwszy rzut oka może ona robić wrażenie oczywistej. Nic bardziej mylnego. W obowiązywanie tej zasady wątpił już Arystoteles. Zasada dwuwartościowości może jawić się jako oczywista tylko dotąd, dokąd ktoś nie poprosi o jej uzasadnienie. Mocą zasady dwuwartościowości logika klasyczna wyklucza istnienie zdań, które nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, i zdań, które są prawdziwe i fałszywe zarazem. O zdaniach, które nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, mówimy, że wpadają w *lukę* prawdziwościową (ang. *truth-value gap*). Zdania, które są prawdziwe i fałszywe zarazem, określamy jako punkty *kolizji* prawdziwościowej (ang. *truth-value glut*). Luki prawdziwościowe i prawdziwościowe kolizje określamy łącznie jako *anomalie* prawdziwościowe. Jeśli okazałoby się, że istnieją luki prawdziwościowe lub prawdziwościowe kolizje, logika klasyczna stanęłaby pod znakiem zapytania. Pozostałaby matematycznie poprawnym rachunkiem, ale jej miarodajność okazałaby się wątpliwa. Zapoznamy się obecnie z najważniejszymi kandydaturami do miana luki lub kolizji prawdziwościowej.

Futura contingentia. Przeszłości, jak się wydaje, zmienić nie sposób — co się stało, to się nie odstanie. Z przyszłością tak być raczej nie musi. Jest ona przesądzona co najwyżej częściowo. Przyszłe zdarzenia, których zajście pozostaje sprawą otwartą, nazywamy *przygodnymi*, po łacinie *futura contingentia*.

Arystoteles postawił pytanie o wartość logiczną zdań opisujących przyszłe zdarzenia przygodne i odpowiedział, że zdania takie nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Zastanawiał się on nad przykładowym zdaniem „jutro odbędzie się bitwa morska”, dlatego problem *futura contingentia* bywa też określany jako problem *jutrzejszej bitwy morskiej*. Wyobraźmy sobie, że zanosi się na bitwę morską, ale wciąż trwają rokowania pokojowe i można mieć nadzieję, że walki da się uniknąć. Jutrzejsza bitwa morska jest więc przyszłym zdarzeniem przygodnym — może do niej dojść, ale nie musi. W takim razie wartość logiczna zdania „jutro odbędzie się bitwa morska” jest dla Arystotelesa problematyczna. Arystoteles rozumuje, mniej więcej, w następujący sposób. Załóżmy, że zdanie „jutro odbędzie się bitwa morska” jest już dzisiaj prawdziwe. Wówczas trwające rokowania pokojowe są marnowaniem czasu. Nie ma sposobu na powstrzymanie bitwy morskiej, ponieważ — jak powiedzieliśmy — nie można zmienić przeszłości. Jeśli zaś za godzinę zwaśnione strony doszłyby do porozumienia i wrogie floty wróciłyby do macierzystych portów, to właśnie za godzinę, a więc w przyszłości, zmieniono by obecny stan rzeczy, mianowicie obecną wartość logiczną zdania „jutro odbędzie się bitwa morska”. Zdanie to nie może więc jeszcze być prawdziwe. Analogicznie można pokazać, że zdanie to nie może jeszcze być fałszywe — albowiem wówczas nie istniałoby żadne zagrożenie wojenne i negocjatorzy marnowaliby wysiłek. Konsekwentnie żadne zdanie opisujące przyszłe zdarzenia nie może być ani prawdziwe, ani fałszywe, dopóki te zdarzenia są przygodne. Zdania dotyczące przyszłości stają się odpowiednio prawdą lub fałszem dopiero w chwili zdeterminowania zajścia lub niezajścia zdarzeń opisywanych przez te zdania.

Zagadka Arystotelesa stała się w Średniowieczu kwestią ważną życiowo, ponieważ została odniesiona do wolnej woli człowieka i wszechwiedzy Boga. To, że Bóg jest wszechwiedzący, miało znaczyć, że odnośnie do wszystkich zdań prawdziwych wie, że są one prawdziwe, a odnośnie do wszystkich zdań fałszywych wie, że są one fałszywe. Z drugiej strony pośmiertny los każdego człowieka powinien istotnie zależeć od wolnych decyzji przez tego człowieka podejmowanych za życia. Zatem za życia Piotra zdanie „Piotr będzie zbawiony" powinno opisywać przyszłe zdarzenie przygodne. Nawet Bóg nie powinien — jak się wydaje — jeszcze wiedzieć, czy Piotr trafi do nieba, czy też będzie się smażyć w piekle. Zatem, dopóki Piotr nie umrze i jego wieczny los nie zostanie przesądzony, zdanie „Piotr będzie zbawiony" nie powinno być ani prawdziwe, ani fałszywe. Niemal każdy wybitny teolog Średniowiecza zabierał głos w tej sprawie, pozostawiając niekiedy głębokie i wciąż ciekawe analizy.

W wieku XX polski logik, Jan Łukasiewicz, potraktował serio problem *futura contingentia*. Uznał, że — skoro zdania opisujące przyszłe zdarzenia przygodne, nie mogą być ani prawdziwe, ani fałszywe — to zdaniom tym musi przysługiwać, niezbadana dotąd, trzecia wartość logiczna. Tę trzecią wartość nazywał *możliwością*, ewentualnie *niezdeterminowaniem*. W miejsce klasycznego podziału zdań na prawdziwe i fałszywe Łukasiewicz zaproponował podział zdań na *już prawdziwe*, *już fałszywe* i *jeszcze nieokreślone* (*jeszcze niezdeterminowane*). Opierając się na takim założeniu, zbudował pierwszy system *logiki trójwartościowej*. Rachunki logiczne, opierające się na założeniu o istnieniu wartości logicznych różnych od prawdy i fałszu, określamy mianem *logik wielowartościowych*. Od czasu Łukasiewicza skonstruowano wielką liczbę takich skończenie, a nawet nieskończenie, wielowartościowych rachunków.

Przedmioty fikcyjne. Aby uchwycić różnicę między przedmiotem realnym, niezależnym od intelektu, a przedmiotem fikcyjnym, stanowiącym wytór intelektu, rozważmy dwie przykładowe osoby: Bolesław Chrobry i Andrzej Kmicic. Weźmy pod uwagę dwa zdania: „Bolesław Chrobry miał trzy zęby mądrości", „Andrzej Kmicic miał trzy zęby mądrości". Nie wiadomo, czy zdania te są prawdziwe, czy fałszywe, i nie ma sposobu, by to ustalić. Mimo to pierwsze zdanie jest prawdą lub fałszem i nasza wiedza nie ma tu nic do rzeczy, ponieważ Bolesław Chrobry jest realnym przedmiotem, istniejącym bez względu na to, czy ktoś o tym wie, czy nie. Sytuacja drugiego zdania jest bardziej problematyczna, ponieważ Andrzej Kmicic jest postacią fikcyjną, wytworem intelektu Henryka Sienkiewicza. Zdanie „Andrzej Kmicic brał udział w obronie Jasnej Góry" jest prawdziwe w tym sensie, że wynika z tekstu Henryka Sienkiewicza. Zdanie „Andrzej Kmicic zmarł we wczesnym dzieciństwie na gruźlicę" jest fałszem w tym sensie, że jest sprzeczne z tekstem Sienkiewicza. Natomiast zdanie „Andrzej Kmicic miał trzy zęby mądrości" nie da się na gruncie tekstu ani potwierdzić, ani obalić. Ponieważ, poza tekstem, żadnego Andrzeja Kmicica nie ma, nie ma też podstawy do przypisania temu zdaniu prawdy ani fałszu. Przedmioty fikcyjne są w tym sensie swoiście niekompletne w przeciwieństwie do przedmiotów realnych. Można spotkać pogląd, w myśl którego przedmioty realne podlegają zasadzie dwuwartościowości, natomiast dziedzina przedmiotów fikcyjnych dopuszcza anomalie prawdziwościowe. Nie ma przy tym zgody odnośnie do tego, czy dopuszczalne są tutaj wyłącznie luki prawdziwościowe, czy też i luki, i kolizje. Jeśliby tak było, to możliwość stosowania klasycznej logiki do zdań o przedmiotach fikcyjnych stałaby się wątpliwa.

Niektórzy filozofowie głoszą, że różnica między przedmiotami realnymi a fikcyjnymi jest pozorna, ponieważ wszystkie przedmioty są w pewnym sensie fikcyjne. Zdaniem tych filozofów w akcie poznania intelekt jest tak aktywny, że rezultaty poznawcze są w istotnym stopniu pochodne od intelektu. Taką tezę określa się jako *idealizm* ontologiczny lub jako *antyrealizm.* Zgodnie z tezą antyrealizmu przedmiot poznania jest wytworem aktu poznania lub wręcz treścią tego aktu. Zgodnie z przeciwną tezą *realizmu* ontologicznego przedmiot poznania jest zastany. Jeśli antyrealiści mieliby racje, to wszystkie przedmioty mogłyby być niekompletne w takim sensie, jak przedmioty fikcyjne. Dlatego można spotkać tezę, wedle której logika klasyczna jest najprecyzyjniejszym wyrazem tezy realizmu ontologicznego, podczas gdy teza antyrealizmu jest wyrażana przez jakąś inną logikę, o której będzie jeszcze mowa.

Narracyjna koncepcja historiografii. Rozważając różnicę między przedmiotami realnymi a fikcyjnymi, wzięliśmy Bolesława Chrobrego za przedmiot realny. Problem polega na tym, że ów przedmiot przestał istnieć tysiąc lat temu. Historyk nie ma żadnego kontaktu poznawczego z Bolesławem Chrobrym. Niektórzy specjaliści wysnuwają stąd wniosek, że minione stany rzeczy nie podlegają zasadzie dwuwartościowości. Wcześniej spotkaliśmy się już z poglądem, że zasadzie tej nie podlegają przyszłe zdarzenia przygodne. Teraz okazuje się, że — z innych powodów — można podważyć obowiązywanie zasady dwuwartościowości w odniesieniu do zdarzeń minionych, do których nie mamy dostępu poznawczego.

Wróćmy do przykładu Bolesława Chrobrego i Andrzeja Kmicica. Powiedzieliśmy, że zdanie „Bolesław Chrobry miał trzy zęby mądrości" jest albo prawdziwe, albo fałszywe, nawet, jeśli w żaden sposób nie można tego dylematu rozstrzygnąć. Otóż zwolennicy czysto narracyjnej koncepcji historii uważają, że jest inaczej. Jeśli nie ma żadnego sposobu sprawdzenia, czy dane zdanie jest prawdą, czy fałszem, to nie jest ono ani prawdą, ani fałszem. Wpada w lukę prawdziwościową. Przedmioty historyczne różnią się od przedmiotów fikcyjnych tym, że miejsce literackiej narracji zajmują wyróżnione *źródła historyczne*. Są to wszelkie pozostałości minionych zdarzeń. W takim ujęciu zdanie historyczne jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy można je potwierdzić w oparciu o źródła historyczne, jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy można je obalić w oparciu o źródła historyczne. Zdania, których w oparciu o bazowe źródła historyczne nie da się ani potwierdzić, ani obalić, nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Różnica między fikcją a historią sprowadza się do stopnia wolności, która w dziedzinie historiografii jest znacznie ograniczona przez źródła.

Omawiając problematykę *futura contingentia*, dowiedzieliśmy się już, że Łukasiewicz uważał przyszłe zdarzenia za jakoś realne dopiero wtedy, gdy zajście tych zdarzeń zostało zdeterminowane, gdy pojawiła się przesądzająca przyczyna tych zdarzeń. Analogicznie uważał on zdarzenia minione za realne tylko tak długo, jak długo istnieją jakiekolwiek skutki tych zdarzeń, jakiekolwiek ich pozostałości — jakiekolwiek źródła historyczne. Wybitny historyk, Jerzy Topolski, na takiej koncepcji przeszłości oparł swoje ujęcie podstaw historiografii. Zwrócił on bowiem uwagę na to, że jedyną rzeczywistością, z jaką ma do czynienia historiografia są źródła historyczne. Nie ma żadnego Bolesława Chrobrego — podobnie, jak nie ma Andrzeja Kmicica — są tylko źródła. Jeśli zaś oponent zwróciłby uwagę na to, że Bolesław Chrobry, mimo wszystko, istniał, Topolski odpowiedziałby, że jest to jedynie narracja oparta na źródłach.

Intuicjonistyczna filozofia matematyki. Intuicjonizm powstał w ramach filozoficznych dociekań nad podstawami matematyki. Kto jest w tej dziedzinie realistą, uważa, że zdania matematyki opisują jakąś zastaną rzeczywistość matematyczną. Przedmioty matematyczne są więc realne, a wartość logiczna zdań matematyki zależy od relacji do tych przedmiotów. Antyrealiści przeczą tym tezom. Ich zdaniem nie ma żadnej zastanej matematycznej rzeczywistości. Matematyka jest zaś dziedziną mniej lub bardziej swobodnej twórczości. Intuicjonizm jest jedną z bardziej rozpowszechnionych wersji antyrealizmu. Na intuicjonistyczną filozofię matematyki składają się dwie tezy:

- subiektywizm,
- konstrukcjonizm.

Twórcą intuicjonistycznej filozofii matematyki jest holenderski matematyk, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (wymawiaj: brałwer). Jego uczeń, Arend Heyting, rozwinął tę teorię, tworząc *logikę intuicjonistyczną*, która uchodzi za jedną z najważniejszych logik nieklasycznych. Tę logikę poznamy z czasem bliżej. Ważne prace dotyczące różnych wersji intuicjonistycznej filozofii matematyki ogłosił Andrey Nikolaevich Kolmogorov, Valery Ivanovich Glivenko, Dirk van Dalen i Kurt Gödel.

Teza subiektywizmu dotyczy sposobu rozumienia prawdziwości w matematyce. Będąc wersją antyrealizmu, intuicjonizm odrzuca istnienie jakiejkolwiek zastanej rzeczywistości matematycznej. Wszystkie matematyczne obiekty są w tym ujęciu wytworami umysłu, a zdania matematyki stanowią wyłącznie sprawozdania z przeprowadzonych zabiegów myślowych. Podobnie, jak w odniesieniu do innych zdań o przedmiotach fikcyjnych, zwykłe pojęcie prawdziwości nie daje się zastosować do zdań matematyki. Prawda w matematyce polega tylko i wyłącznie na posiadaniu dowodu, a fałsz tylko i wyłącznie na sprzeczności ze zdaniami posiadającymi dowód. Matematyczne zdania, które nie są ani udowodnione, ani obalone, nie są w żadnym sensie ani prawdziwe, ani fałszywe. Intuicjonizm dopuszcza więc istnienie luki prawdziwościowej. Natomiast istnienie kolizji prawdziwościowej jest na gruncie intuicjonizmu wykluczone.

O ile subiektywizm jest redukcją prawdy do dowodu, o tyle teza konstrukcjonizmu stanowi ograniczenie dopuszczalnych sposobów dowodzenia. Pod koniec XIX w. praktycznie cała arytmetyka, geometria i analiza matematyczna zostały zrekonstruowane w ramach arytmetyki liczb naturalnych. Na przykład liczby całkowite zostały zrekonstruowane jako pewne układy liczb naturalnych, liczby wymierne jako układy liczb całkowitych itp. Zdaniem intuicjonistów składanie prostszych wytworów myśli w twory bardziej złożone jest jedynym dopuszczalnym sposobem rozumowania w matematyce. Najprostszymi obiektami matematycznymi są liczby naturalne, które znalazły się u podstaw dziewiętnastowiecznej unifikacji matematyki. Jak sądzą intuicjoniści, w matematyce istnieje wszystko to i tylko to, co da się skonstruować z liczb naturalnych. Same zaś liczby naturalne powstają w umyśle na bazie powszechnego doświadczenia przemijania, następowania jeden po drugim kolejnych, potencjalnie nieskończenie wielu chwil. Tę myśl intuicjoniści zaczerpnęli z filozofii Immanuela Kanta.

Przyjrzyjmy się przykładowi, który przez Brouwera był uważany za najważniejszy, mianowicie dowodom istnienia przedmiotów spełniających określone warunki. Zdaniem ituicjonistów wyrażenie

$$\exists x\colon P(x) \tag{4.1}$$

może być uznane za dowiedzione tylko pod tym warunkiem, że wcześniej dowiedziono wyrażenia

$$P(a) \tag{4.2}$$

dla co najmniej jednego przedmiotu a. Zatem jedynym sposobem dowiedzenia, że istnieje liczba spełniająca jakiś warunek jest znalezienie takiej liczby. Aby lepiej uzmysłowić sobie wagę tego poglądu, opuśćmy teren matematyki na rzecz powieści kryminalnych. Kiedy już popełniono zbrodnię, wiadomo, że wśród bohaterów istnieje co najmniej jeden morderca — istnieje taki x, że x jest mordercą. Jest to wiadome, mimo że do ostatniego rozdziału nie wiemy, kto tym mordercą jest. Jednakże stąd, że istnieje trup, wolno wywnioskować, że istnieje zbrodniarz. Sedno konstrukcjonizmu jest takie, że nie wiemy, czy morderca istnieje, czy też nie, dopóki nie rozwikłamy zagadki i nie dowiemy się, kto zabił. Zatem jedynym sposobem uzasadnienia zdania „dla pewnego x: x zabił kota Mruczka" jest uzasadnienie jakiegoś, co najmniej jednego, zdania o postaci „a zabił kota Mruczka". Z drugiej strony brak dowodu jakiegokolwiek wyrażenia o postaci (4.2) nie jest jeszcze dowodem wyrażenia

$$\neg\exists x\colon P(x). \tag{4.3}$$

Żeby udowodnić wyrażenie (4.3), należy wykazać, że wyrażenie (4.1) nie tylko nie ma dowodu, ale nigdy nie będzie mogło go mieć. W tym celu należy wykazać, że wyrażenie (4.1) jest sprzeczne z jakimiś już dowiedzionymi wyrażeniami.

W świetle filozofii intuicjonistycznej zdania matematyki dzielą się na definitywnie dowiedzione, definitywnie obalone i pozostałe, które nie zostały ani dowiedzione, ani obalone. Z drugiej strony, jak sądzą intuicjoniści, w matematyce nie ma innej prawdy, niż dowód, ani innego fałszu niż obalenie. Zdania matematyki mogą więc być prawdziwe, fałszywe lub ani prawdziwe, ani fałszywe. W języku matematyki występują luki prawdziwościowe, choć prawdziwościowe kolizje są wykluczone.

Część filozofów, którzy opowiadają się za antyrealizmem, jest przekonana, że intuicjonizmu nie należy ograniczać do filozofii matematyki. Traktują oni intuicjonizm raczej jako ogólną ontologię, obowiązującą we wszystkich dziedzinach. Filozofowie ci uważają, że logika klasyczna opiera się na realistycznym ujęciu rzeczywistości i wyraża je, podczas gdy logika intuicjonistyczna — którą wkrótce poznamy — opiera się i wyraża antyrealistyczne podejście do rzeczywistości. Główne prace w tym duchu ogłosił Michael Dummet.

Rzeczywiście, intuicjonizm, który — jak zobaczymy — dysponuje własną, rozpracowaną logiką, jest dla antyrealisty bardzo atrakcyjną teorią, mającą wszelkie znamiona naukowości. Rachunkowe ujęcie realizmu i antyrealizmu dawałoby teorii bytu precyzyjny język, którego tak bardzo brakuje tej trudnej dyscyplinie. Z drugiej strony intuicjonizm nie jest jedyną możliwą wersją antyrealizmu.

Fizyka kwantowa. W początkach Oświecenia zrodziła się wiara, że ludzie wiedzą już bardzo dużo, że pozostało już niewiele tajemnic, a niebawem nie będzie ich wcale. W tym duchu pod koniec XIX w. rozpowszechniło się przekonanie, że w fizyce rozwiązano już niemal wszystkie problemy. Początek wieku XX, zamiast rozstrzygnięcia ostatnich pytań, przyniósł wielki kryzys i dogłębne przemiany w podstawach wiedzy, w tym fizyki. Okazało się, że ludzka wiedza jest raczej tragicznie znikoma niż niemalże doskonała. Rewolucja w podstawach fizyki, zapoczątkowana odkryciem promieniotwórczości i elektromagnetyzmu, wiąże się przede wszystkim z teorią względności i mechaniką kwantową. W odniesieniu do tej drugiej teorii niektórzy badacze nabrali podejrzeń, że stanowi ona nie tylko dogłębną modyfikację samej fizyki, ale również logicznych podstaw przyrodoznawstwa. Ich zdaniem wyniki mechaniki kwantowej wymagają zmian w klasycznej logice. Ten ważny i bardzo skomplikowany problem do dziś nie został zadowalająco rozwiązany.

Powstanie mechaniki kwantowej wiąże się z upadkiem fizykalnego mechanicyzmu i klasycznego materializmu. Zgodnie z tymi poglądami materia jest zbudowana z obiektów, które mają skończone rozmiary i między którymi zachodzą wyłącznie oddziaływania mechaniczne. Te obiekty miały nazywać się atomami. Pogląd ten zachwiał się wraz z odkryciem promieniotwórczości. Wkrótce potem, w ramach mechaniki kwantowej dostarczono przekonujące argumenty za tym, że mechanika klasyczna nie znajduje zastosowania w pewnej sferze zjawisk, zwanej mikroświatem lub światem kwantowym. Wielu uczonych sądzi, że również logika klasyczna załamuje się w tej sferze zjawisk. Rzadko jednak można spotkać próby dokładnego objaśnienia, na czym owo załamanie miałoby polegać. Najbardziej typowe wątpliwości, wyrastające z mechaniki kwantowej, a dotyczące logiki klasycznej, wiążą się z dwoma związanymi ze sobą momentami rozważanego działu fizyki:

- dualizm korpuskularno-falowy,
- zasady nieoznaczoności.

Dokładniej mówiąc, wątpliwości te powstają w ramach filozoficznej interpretacji odnośnych wyników mechaniki kwantowej.

Przez dualizm korpuskularno-falowy rozumiemy wzajemne dopełnianie się dwóch aspektów rzeczywistości fizycznej. W niektórych eksperymentach promień świetlny zachowuje się tak, jak gdyby był falą: ulega dyfrakcji, refrakcji i interferencji. W innych zachowuje się jak cząstka, charakteryzowana przez określony pęd i energię: badania nad ciałami doskonale czarnymi, zjawisko fotoelektryczne i zjawisko Comptona. Co ważne, nie ma doświadczenia, w którym promień świetlny równocześnie ujawniłby obydwa oblicza. Okazało się, że nie tylko światło, lecz cała materia może być pojmowana dualistycznie - z każdym obiektem fizycznym związana jest swoista fala materii.

Centralnym punktem mechaniki kwantowej jest *równanie Schrödingera*, opisujące zachowanie się cząstki materii jako zaburzenie związanej z tą cząstką fali materii. Zaburzenie tej fali jest określane jako wektor stanu lub jako funkcja falowa. Druga potęga amplitudy tej funkcji jest miarą prawdopodobieństwa znalezienia odnośnej cząstki w określonym miejscu. Badając przebieg funkcji falowej, otrzymujemy informację o prawdopodobieństwie znalezienia cząstki w określonym miejscu, a nie o samym położeniu cząstki. Analogicznie rzecz się ma z innymi własnościami badanego obiektu. Krótko mówiąc stan obiektu kwantowego wyrażany jest wyłącznie jako prawdopodobieństwo określonego wyniku pomiaru.

Akt pomiaru własności obiektu kwantowego przekształca opisane prawdopodobieństwo w zwykłą pewność. Ważne jest to, że przed aktem pomiaru badana własność obiektu kwantowego nie jest określona w żaden sposób poza prawdopodobieństwem. Pomiar, dostarczając takiego określenia, nieodwracalnie zaburza badany układ. Możliwości pomiarowe są ograniczone przez zasady nieoznaczoności. Pierwszą z tych zasad sformułował w 1927 r. Werner Karl Heisenberg. Wyklucza ona dokładne, równoczesne określenie pędu i położenia obiektu kwantowego, ustalając zależność:

$$\Delta x \Delta p \geqslant \hbar,$$

w której Δx jest miarą niedokładności pomiaru położenia x badanego obiektu, Δp jest miarą niedokładności pomiaru pędu p tego obiektu, a stała Diraca $\hbar$ jest ilorazem stałej Plancka h i liczby 2π. Zatem, im dokładniej znane jest położenie obiektu, tym mniej wiadomo o jego pędzie, i odwrotnie. Analogiczna zasada dotyczy pomiaru energii i czasu. Wielkości połączone zasadami nieoznaczoności nazywa się wielkościami komplementarnymi.

Dla dyskusji nad logicznymi podstawami fizyki kwantowej istotne są dwa problemy. Przede wszystkim należy zapytać, czy kwantowe ograniczenia dotyczą samych obiektów fizycznych, czy też wiedzy o tych obiektach. Zagadnienie to jest dobrze zilustrowane przez myślowy eksperyment zwany *kotem Schrödingera*. Wyobraźmy sobie nieprzeźroczystą skrzynkę, w której zamknięto kota. Przypuśćmy, że skrzynka jest wyposażona w pojemnik z trucizną i w mechanizm, który losowo uwalnia tę truciznę lub nie. Dopóki nie otworzymy skrzynki, nie wiemy, czy kot jest martwy, czy żywy. Znamy, co najwyżej, prawdopodobieństwo przeżycia przezeń eksperymentu. Mimo to, mimo naszej niewiedzy, zamknięty w skrzynce kot bądź żyje, bądź nie żyje. Jeśli zasady mechaniki kwantowej dotyczyłyby kota, przed otwarciem skrzynki nie byłby on ani żywy, ani martwy. Lub też, być może, byłby i żywy, i martwy zarazem. Kot stawałby się — z określonym prawdopodobieństwem — martwy lub żywy dopiero w rezultacie otwarcia skrzynki. Jeśli nieoznaczoność dotyczy samych obiektów kwantowych, to przykładowy elektron nie znajduje się w żadnym ewentualnym miejscu lub znajduje się we wszystkich równocześnie, nie ma określonego pędu, energii itp. lub ma wszystkie dopuszczalne wartości tych parametrów zarazem. W przeciwnym razie jest tylko tak, że nie mamy żadnych szans na zbadanie odnośnych parametrów z dowolną dokłądnością. Klasycy fizyki kwantowej nie są w tej materii zgodni. Niels Bohr i Heisenberg byli przekonani, że ograniczenia kwantowe dotyczą samej rzeczywistości, podczas gdy John von Neumann i Carl Friedrich von Wiezsäcker skłaniali się ku przypisywaniu istotnej nieokreśloności wyłącznie naszej wiedzy.

Jeżeli kwantowe ograniczenia dotyczą tylko naszej wiedzy, to logika klasyczna nie jest w żaden sposób przez fizykę zagrożona. Co najwyżej można pytać o uzupełnienie logiki o model stanu wiedzy obserwatora. Jeśli jednak rację mają ci badacze — a są oni w większości — którzy ograniczenia kwantowe przypisują samym obiektom fizycznym, to sprawa jest bardziej skomplikowana. Są bowiem wówczas ważkie argumenty za tezą, w myśl której takie zdania, jak „obiekt znajduje się w tym-a-tym miejscu", „ma taką-a-taką energię" i podobne, a nawet takie zdania, jak „ten obiekt jest cząstką", „ten obiekt jest falą" mogą nie być ani prawdziwe, ani fałszywe, lub też mogą być prawdziwe i fałszywe zarazem. W każdym razie można zasadnie podejrzewać mechanikę kwantową o prawdziwościowe anomalie.

Ważne jest jeszcze drugie pytanie. Załóżmy, że obiekty kwantowe podlegają kwantowym ograniczeniom. Pozostaje otwarta kwestia, czy osobliwość tych obiektów sięga poziomu logicznego. Być może ogranicza się ona do poziomu wyobrażeniowego. Być może nie umiemy wyobrazić sobie obiektów kwantowych, ponieważ nie są one podobne do niczego, co możemy postrzegać. Mimo to jednak jakieś są. Warto w związku z tym pamiętać, że sednem mechaniki kwantowej są matematyczne równania, które dają się potwierdzić eksperymentalnie. Zaś matematyka, która stanowi podstawę mechaniki kwantowej, jest to wyłącznie klasyczna matematyka, oparta na klasycznej logice. W matematycznej części fizyki kwantowej nie wchodzi więc w grę żadna inna logika poza klasycznym rachunkiem logicznym. Wątpliwości pojawiają się dopiero wtedy, gdy usiłujemy wyobrazić sobie kwantowy świat. Nie można wykluczyć tego, że w okresie wielkich przemian w nauce, a także wielkich przemian społecznych, w jakie obfitowała pierwsza połowa XX w., uczeni ulegli rewolucyjnej skłonności i przedwcześnie rozpowszechnili plotkę o śmierci logiki klasycznej. Sprawa ta pozostaje otwarta.

Polski filozof, Zygmunt Zawirski, jako pierwszy głosił pogląd o potrzebie rewizji logiki klasycznej wobec wyników mechaniki kwantowej, dopatrując się w fizyce kwantowej prawdziwościowych anomalii. Później ważne prace na ten temat ogłosili m.in. Hans Reichenbach, John von Neumann, Garrett Birkhoff, Paulette Destouches-Février (wymawiaj: detu ferie) i Carl Friedrich von Weizsäcker.

Granice poznania i transcendencja. Problem transcendencji powstaje wtedy, gdy ktoś uznaje istnienie granic ludzkich możliwości poznawczych, a zarazem odnosi się w jakikolwiek sposób do przedmiotów leżących poza tymi granicami. Przedmiot, którego nie można poznać, jest *transcendentny.* Stwierdzając, że jakiś przedmiot jest transcendentny, uznajemy go za niepoznawalny, a zarazem go poznajemy, dowiadujemy się bowiem, że jest niepoznawalny.

Wielu myślicieli uważało, że Bóg tak dalece różni się od wszystkiego, co człowiek może poznać, że jest literalnie niepoznawalny. Tym samym jednak myśliciele ci czegoś jednak o Bogu się dowiadywali, mianowicie tego, że jest niepoznawalny. Bóg okazywał się wówczas zarazem niepoznawalny i poznawalny. Niemiecki filozof, Immanuel Kant rozszerzył ideę transcendencji na całą praktycznie rzeczywistość. Jego zdaniem rzeczy same w sobie w ogóle są niepoznawalne. Wszystko, co poznajemy, to zjawiska, będące wypadkową owych rzeczy samych w sobie i działania naszych władz poznawczych. Nie można nic powiedzieć ani pomyśleć o rzeczy samej, ponieważ tym samym poddałoby się ją obróbce poznawczej. Poglądy te nie przeszkadzały Kantowi w wypowiadaniu wielu uwag na temat rzeczy samych w sobie, m.in. w dostarczaniu obszernego uzasadnienia ich absolutnej niepoznawalności. Zatem, wedle Kanta, każda rzecz jest poznawalna i niepoznawalna zarazem. Całkiem analogiczny pogląd pochodzi od Ludwiga Wittgensteina. Jego zdaniem język nadaje się wyłącznie do stwierdzania faktów, z których składa się rzeczywistość. Stwierdzanie faktów jest możliwe dzięki strukturalnemu podobieństwu rzeczywistości i języka. Podobieństwo to jednak, samo nie będąc faktem, leży poza granicami mowy, jest niewypowiadalne. Z drugiej strony główna praca Wittgensteina w znacznym stopniu zawiera dociekania dotyczące struktury świata, kończąc się wnioskiem o niewypowiadalności owej struktury. Wydaje się więc, że struktura świata nadaje się i zarazem nie nadaje do wypowiedzenia.

Z jednej strony są solidne filozoficzne powody, by sądzić, że pewne fragmenty rzeczywistości wykraczają poza ludzkie zdolności poznawcze. Z drugiej, jak widać, pogląd ten jest wysoce problematyczny. Zawsze problematyczne jest myślenie i mówienie o przedmiotach transcendentnych. Jedną z prób rozwiązania trudności jest przekonanie, że na pograniczu poznania załamuje się zasada dwuwartościowości, mogą tam powstać anomalie prawdziwościowe, zwłaszcza kolizje. Zdania dotyczące przedmiotów transcendentnych mogą być prawdziwe i fałszywe zarazem. Tym samym jednak problematyczne staje się stosowanie do takich zdań klasycznej logiki.

Nieostrość. Miarodajność logiki klasycznej może być zakwestionowana nie tylko z punktu widzenia fizyki kwantowej lub antyrealistycznej matematyki, ale również na pozornie swojskim gruncie mowy potocznej. Najważniejszym źródłem domniemanych anomalii prawdziwościowych jest tutaj *nieostrość*. Za nieostre uważamy te zwroty, których sposób użycia jest tylko częściowo wyznaczony przez ich znaczenie. Wielu badaczy skłania się do poglądu, że w wypadku nieostrości mamy do czynienia z anomalią prawdziwościową — raczej luką, ewentualnie również kolizją. Można wskazać na cztery główne źródła nieostrości: stopniowalność, braki kwantyfikacji, złożoność znaczenia i alternatywność charakterystyk.

Nieostrość powstaje często w granicznych sytuacjach użycia określeń stopniowalnych. Weźmy przykładowo pod uwagę zdanie „Euzebiusz jest łysy". Zgodzimy się, że zdanie to jest fałszywe, jeśli Euzebiusz cieszy się bujną fryzurą, złożoną ze 150 tysięcy włosów. Zgodzimy się również, że zdanie to jest prawdziwe, jeśli Euzebiusz dysponuje ledwie setką włosów. Znaczenie przymiotnika „łysy" nie pozwala natomiast na określenie wartości logicznej rozważanego zdania w sytuacji, w której Euzebiusz ma, powiedzmy, tysiąc włosów na skórze głowy. Innymi nieostrymi zwrotami są wyrazy „duży", „długi", „wysoki" itp. Podobne problemy powstają w związku z użyciem takich zwrotów, jak „mniej więcej", „całkiem", „solidnie" i podobnych.

Drugim częstym źródłem nieostrości jest brak kwantyfikatora. Tak się dzieje z nazwą „odważny". Zasadniczo nazwiemy odważnym kogoś, kto potrafi postępować słusznie wtedy, gdy to wymaga opanowania wielkiego, zasadnego strachu. Nie jest jednak jasne, czy odważny człowiek musi działać w ten sposób zawsze, co najmniej raz, wiele razy itp. Nie wiadomo, na przykład, czy osoba, która raz wykazała się wielką odwagą, ale także raz zhańbiła się wielkim tchórzostwem, jest odważna, czy nie.

Użycie niektórych zwrotów może zostać sparaliżowane przez bardzo wysoki stopień złożoności znaczenia. Przykładami nieostrych zwrotów o wysoce złożonym znaczeniu są takie nazwy, jak „naród", „religia", „nauka" i „dzieło sztuki". Choć wiadomo, jak posługiwać się nimi w typowych sytuacjach, to kiedy indziej nie daje się określić, czy, przykładowo, dana grupa zasługuje na miano narodu, czy nie.

Nieostrość może być wywołana również przez niezgodność alternatywnych znaczeń danego zwrotu. Przykładem takiej nieostrości jest nazwa „dopływ". Wyobraźmy sobie dwie rzeki, a i b, które w pewnym miejscu się łączą. Jeśli rzeka a jest znacznie krótsza i znacznie węższa od rzeki b, to zdanie „rzeka a jest dopływem rzeki b" (ewentualnie „rzeka a wpada do rzeki b"), jest prawdą. Jeśli jest odwrotnie, to takie zdanie jest fałszem. Jeśli jednak rzeka a jest dłuższa, ale węższa, od rzeki b, to wartość logiczna takiego zdania staje się problemem. Jest to spowodowane tym, że nazwa „dopływ" ma równoprawne, alternatywne charakterystyki znaczeniowe: krótsza rzeka jest dopływem dłuższej, węższa rzeka jest dopływem szerszej. W razie niezgodności tych charakterystyk powstaje nieostrość.

Presupozycje. Wedle niektórych badaczy w zasadę dwuwartościowości godzą również zdania o fałszywych *presupozycjach*. Wyrażenie $\mathcal{B}$ jest presupozycją wyrażenia $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \quad \text{oraz} \quad \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B},$$

czyli presupozycjami wyrażenia $\mathcal{A}$ nazywa się te wyrażenia, które są konsekwencjami zarówno wyrażenia $\mathcal{A}$, jak i jego negacji. Łatwo się przekonać, że na gruncie klasycznego rachunku zdań presupozycjami są wszystkie tautologie i tylko tautologie. Zatem wszelkie presupozycje jakiegokolwiek zdania są prawdziwe. Na przykład zdanie „Tristan kocha Izoldę lub Tristan nie kocha Izoldy" jest presupozycją zdania „Tristan kocha Izoldę".

Największa grupa ewentualnych fałszywych propozycji wiąże się ze zdaniami dotyczącymi istnienia przedmiotów, o których jest mowa. Takie presupozycja nazywają się presupozycjami *egzystencjalnymi.* Na przykład według wybitnego filozofa, Bertranda Russella, zdanie „istnieje obecny król Francji" jest presupozycją zdania „obecny król Francji jest łysy", ale wówczas byłaby to presupozycja fałszywa. Podkreślmy, że to, czy mamy tu do czynienia z presupozycją, nie jest bezdyskusyjne. Jeśli jednak tak by miało być, to logika klasyczna stanęłaby pod znakiem zapytania. Można spotkać pogląd, że zdania o fałszywych presupozycjach nie są ani prawdziwe, ani fałszywe.

Powstały logiki wielowartościowe, dopuszczające istnienie presupozycji niebędących tautologiami, w tym presupozycji fałszywych. Bardzo ważnym polem dociekań nad presupozycjami egzystencjalnymi są *logiki wolne.* Jak powiedzieliśmy, konstrukcja dowolnej interpretacji w logice pierwszego rzędu wymaga użycia co najmniej jednej nazwy jednostkowej. Znaczy to, że logika pierwszego rzędu zakłada isnienie co najmniej jednego przedmiotu. Może on być zupełnie dowolny, ale jego istnienie jest wymagane. Logiki wolne są wolne właśnie od tego ograniczenia, to znaczy, dopuszczają interpretacje o pustych zakresach.

Logiki wolne wywodzą się z *teorii deskrypcji* Russella. Wedle jego hipotezy nazwy jednostkowe — wszystkie bądź tylko niektóre — są ukrytymi skrótami zwrotów typu „jedyny przedmiot, który spełnia takie a takie warunki". Takie zwroty nazywa się *deskrypcjami* określonymi. Na przykład nazwa „obecny król Francji" jest zakamuflowaną deskrypcją „jedyny x, który jest obecnym królem Francji". Specjalny symbol „ι", zwany deskryptorem, wiąże zmienne, podobnie jak kwantyfikator. Napis „$\iota x\colon \mathcal{A}(x)$" jest ogólną postacią deskrypcji określonej i powinien być odczytywany: jedyny taki x, że $\mathcal{A}(x)$. Deskrypcja określona jest termem, a więc może pełnić funkcję podmiotu logicznego. Russell przyjął następującą definicję:

$$\mathcal{B}(\iota x\colon \mathcal{A}(x)) \equiv \nexists x\colon \mathcal{A}(x) \wedge \forall x\colon (\mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)),$$

wedle której podane wyrażenie zwierające deskrypcję znaczy, że istnieje dokładnie jeden x, który spełnia wyrażenie $\mathcal{A}(x)$, i każdy x, który spełnia to wyrażenie, spełnia też wyrażenie $\mathcal{B}$. Przy takim rozumieniu deskrypcji zdanie „istnieje obecny król Francji" nie jest presupozycją zdania „obecny król Francji jest łysy". Zdanie „obecny król Francji jest łysy" zawiera bowiem ukrytą deskrypcję i znaczy, że istnieje dokładnie jeden obecny król Francji oraz każdy obecny król Francji jest Łysy. Jest to więc konsekwencja zdania „obecny król Francji jest łysy", ale nie jest to konsekwencja jego negacji. Albowiem zdanie „obecny król Francji nie jest łysy" znaczy, że bądź nie istnieje obecny król Francji, bądź jest wielu obecnych królów Francji, bądź jakiś obecny król Francji nie jest łysy. Teoria deskrypcji pozwoliła na wyjaśnienie wielu ważnych zjawisk logicznych. Z drugiej strony sama napotkała pewne trudności. Obecnie logika wolna jest szeroko rozwijaną i zróżnicowaną dziedziną badań.

Izostenia i dialeteizm. Z izostenią mamy do czynienia wtedy, gdy pewne wyrażenie $\mathcal{A}$ jest równie dobrze uzasadnione, jak negacja $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ tego wyrażenia. Kiedy mówimy o równie dobrym uzasadnieniu, możemy mieć na myśli zarówno uzasadnienie mocne, jak i słabe.

Jednym z najprostszych przykładów izostenii są sprzeczne zeznania świadków podczas dochodzenia lub rozprawy sądowej. Ktoś, kto jest podejrzany o dokonanie morderstwa, może twierdzić, że wieczór zbrodni spędził z osobami a i b, grając w karty. Jeśli osoba a to potwierdza, zaś osoba b temu przeczy, śledczy znajdują się w trudnej sytuacji. Nie mogą po prostu uwierzyć obu świadkom, ponieważ zasada Dunsa Szkota unicestwi ich wnioskowania. Zwykle śledczy postępują zgodnie z definicją 23. To znaczy, godzą się z tym, że nic nie jest uzasadnione, dopóki nie okaże się, który ze świadków mówi prawdę. Bywa jednak i tak, że zachodzi potrzeba jakiegoś — przynajmniej prowizorycznego — wnioskowania na podstawie sprzecznych przesłanek. Zdarza się to przynajmniej osobom korzystającym z wielkich baz danych i osobom analizującym systemy prawne.

Podobnie rzecz się ma z systemami norm prawnych, zawierającymi ogromną, niemożliwą do ogarnięcia liczbę przepisów. Na przykład, do niedawna w Australii obowiązywał przepis zabraniający kobietom pełnienia funkcji przysięgłego w sądzie. Obowiązywał też przepsi zobowiązujący studentów prawa do pełnienia tej funkcji. W pewnym momencie zezwolono kobietom na studiowanie prawa, nie pamiętając o zniesieniu zakazu pełnienia funkcji przysięgłego. Przez dłuższy czas w Australii kobietom zarazem było i nie było wolno pełnić tej funkcji.

Również w wielkich bazach danych często znajdują się sprzeczne informacje. Skażona sprzecznością baza danych może — na gruncie logiki klasycznej — udzielić całkiem dowolnej odpowiedzi na każde zapytanie.

Widać, że sam fakt istnienia izostenii nie podważa zasady dwuwartościowości ani innych prawideł logiki klasycznej. Mimo to część logików zadaje pytanie, w jaki sposób wolno, choćby tymczasowo, wnioskować na podstawie sprzecznych przesłanek, które znajdują się w stanie izostenii. Dla takich potrzeb opracowywane są specjalne logiki, w których nie obowiązuje zasada Dunsa Szkota. Takie logiki nazywają się logikami *nieszkotowymi* lub *parakonsystentnymi*. Zauważmy, że wszystkie logiki relewantne są z definicji parakonsystentne. Jeśli logiki parakonsystentne są tworzone dla potrzeb analizy izostenii, nie stanowią faktycznej konkurencji względem logiki klasycznej. Raczej mają za zadanie uzupełniać ją w szczególnych okolicznościach.

Od izostenii należy odróżnić *dialeteję*, to znaczy domniemaną parę prawdziwych zdań, z których jedno jest negacją drugiego. Jeśli jakiekolwiek wyrażenia: $\mathcal{A}$ oraz $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ miałyby być współprawdziwe, miarodajność logiki klasycznej mogłaby zostać podważona. Pogląd, że dialeteja istnieje, jest określany jako *dialeteizm*. Samo uznanie istnienia izostenii nie przesądza opowiedzenia się za dialeteizmem, ale akceptacja antynomii już tak. Innym, częstym źródłem dialeteizmu jest omówiona problematyka transcendencji.

Relewancja. Zasada dwuwartościowości nie jest jedynym źródłem wątpliwości dotyczących logiki klasycznej. Wątpliwości może budzić sama klasyczna koncepcja wynikania. Wiadomo, że na gruncie logiki klasycznej każde wyrażenie jest konsekwencją sprzecznego zbioru wyrażeń. Ta zależność znana jest jako Zasada Dunsa Szkota. W szczególności

$$\mathcal{A}, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \tag{4.4}$$

dla dowolnych wyrażeń: $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Jak wiadomo, jest tak dlatego, że nie istnieje interpretacja, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia składające się na zbiór sprzeczny. Na podstawie Zasady Dunsa Szkota takie wnioskowania, jak

Bolesław Chrobry miał słuch muzyczny,
Bolesław Chrobry nie miał słuchu muzycznego,

Platon był amerykańskim koszykarzem,

są logiczne. Z drugiej strony dowolna tautologia wynika z dowolnych przesłanek, a więc

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{B}) \tag{4.5}$$

dla dowolnych wyrażeń $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jest tautologią. Jak wiadomo, jest tak dlatego, że tautologie są prawdziwe we wszystkich interpretacjach. Zatem, w świetle klasycznego rachunku zdań, takie wnioskowania, jak:

Bolesław Chrobry był pierwszym królem Polski,
Dobrawa była żoną Mieszka I,

Platon był w Indiach lub Platona nie było w Indiach,

są logiczne. W obu przedstawionych wypadkach wniosek wynika logicznie z przesłanek. To jednak może robić wrażenie błędu *ignoratio elenchii*. Uczeni, którzy zarzucają ten błąd klasycznemu rachunkowi zdań, postulują znalezienie takiej logiki, która gwarantowałaby zachodzenie istotnego związku treściowego między przesłankami a konkluzją dedukcyjnego wnioskowania. Postulują, by w dedukcyjnym wnioskowaniu przesłanki zawsze okazywały się istotne (*relewantne*) dla konkluzji. Z tego powodu związek, o który im chodzi, nazywa się związkiem *relewancji*, a logiki, które czynią zadość ich wymogom, są określane jako *relewantne*.

Warto zauważyć, że problem relewancji nie musi wcale godzić w logikę klasyczną i nie musi wymagać tworzenia nowych rachunków logicznych. Być może, wystarczy doprecyzować pojęcie wynikania. Można rozważyć definicję, którą zaproponował Bernard Bolzano.

Definicja 23 (wynikanie relewantne) *Wyrażenie $\mathcal{B}$ wynika logicznie z wyrażeń: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, …, $\mathcal{A}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy* (a) *wyrażenie $\mathcal{B}$ jest prawdziwe w każdej takiej interpretacji, w której prawdziwe są wszystkie wyrażenia: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, …, $\mathcal{A}_n$,* (b) *istnieje interpretacja, w której wszystkie wyrażenia: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, …, $\mathcal{A}_n$ są prawdziwe, oraz* (c) *istnieje interpretacja, w której wyrażenie $\mathcal{B}$ nie jest prawdziwe.*

W punkcie (a) ujęta jest klasyczna idea wynikania. Punkt (b) blokuje wnioskowanie ze sprzecznego zbioru przesłanek. Wyraża on tę ideę, że w razie wykrycia sprzeczności wśród przesłanek należy postawić znak zapytania nad wszystkimi konkluzjami i szukać ukrytego błędu. Taka jest znana z historii nauki odruchowa praktyka w razie wykrycia antynomii. Proponujemy więc tutaj, by przyjąć, że ze sprzecznych przesłanek nie wynika nic, podczas gdy w klasycznej koncepcji wynikania ze sprzecznych przesłanek wynika wszystko. Na mocy punktu (c) tautologie nie są wywnioskowane z żadnych innych wyrażeń, rzeczywiście, żadne dodatkowe przesłanki, jak wiadomo, nie są potrzebne dla ich uznania.

Modi veritatis. Wielu badaczy uważa, że logika klasyczna, co prawda, nie stanowi miarodajnego ujęcia zależności logicznych, ale jej pierworodnym grzechem nie jest zasada dwuwartościowości, ale raczej zasada ekstensjonalności. Zdaniem tych uczonych logika klasyczna jest zbyt uboga, by mogła z powodzeniem spełniać swoje zadania. Klasyczne, ekstensjonalne, ujęcie stałych logicznych nie pozwala na uchwycenie istoty związku wynikania.

Wartość logiczna wyrażenia złożonego w jezyku logiki, jak sądzą ci uczeni, powinna zależeć nie tylko od wartości logicznych komponentów, ale ponadto *sposobu*, w jaki te wartości są *zmodyfikowane*. Zdania nie bywają po prostu prawdziwe, ale prawdziwe z konieczności, przygodnie lub tylko możliwie, prawdziwe dzisiaj, kiedyś lub zawsze itd. Sposoby modyfikacji wartości logicznej (po łacinie *modi veritatis*) są zwykle obdarzane mianem *modalności*. Najważniejszymi typami modalności (modyfikacji) wartości logicznych, stanowiącymi przedmiot zainteresowania we współczesnej logice, są modalności:

- aletyczne, np. konieczność, przygodność, możliwość,
- deontyczne, np. nakaz, przyzwolenie, zakaz,
- temporalne, np. przyszłość, uprzedniość, wieczność,
- epistemiczne, np. wiedza, przypuszczenie, wątpienie,
- apodejktyczne, np. dowodliwość, wyprowadzalność.

Terminy, wyrażające modalności, są nazywane terminami (funktorami) *modalnymi* w przeciwieństwie do terminów prawdziwościowych (ekstensjonalnych) logiki klasycznej. Rzeczywiście, użyciem tych terminów nie rządzi zasada ekstensjonalności. Jeśli, na przykład, w prawdziwym zdaniu „Juliusz Cezar wiedział, że Rzym leży w Italii" zastąpimy prawdziwy komponent „Rzym leży w Italii" innym prawdziwym komponentem, „$e = mc^2$", to otrzymamy fałszywe zdanie „Juliusz Cezar wiedział, że $e = mc^2$". Wnioskujemy stąd, że wartość logiczna zdania złożonego, zbudowanego za pomocą modalnego zwrotu „wiedział, że”, zależny nie tylko od wartości logicznej komponentów, ale od innych jeszcze czynników.

Teorie logiczne, uwzględniające modyfikacje wartości logicznych, nazywają się *logikami modalnymi*. Niekiedy ten termin jest stosowany w węższym sensie , wyłącznie do teorii modalności aletycznych. Teorie innych typów modalności są wówczas nazywane odpowiednio logikami deontycznymi (logikami norm), logikami temporalnymi, logikami epistemicznymi i logikami dowodliwości. Filozofowie nie są zgodni, czy modyfikacje odnoszą się pierwotnie do samych wartości logicznych czy też do stanów rzeczy, z których zdania zdają sprawę. To zagadnienie nie jest dla logiki w ogóle istotne, dopuszczamy więc równolegle obydwa sposoby mówienia.

Domniemane ubóstwo pojęciowe logiki klasycznej najłatwiej zauważyć na przykładzie funktora implikacji, który od tysiącleci budzi wciąż największe wątpliwości. W słynnej powieści *Bracia Karamazow* Fiodora Dostojewskiego Starzec Zosima wypowiada zdanie:

$$\text{jeżeli Boga nie ma, to wszystko jest dozwolone.} \tag{4.6}$$

W tych słowach wyraża ważną tezę filozoficzną, w myśl której obowiązywanie prawa moralnego może być wyjaśnione tylko przez istnienie Boga, który jest źródłem tego prawa. Stąd, jeśli Boga nie ma, to nie obowiązują żadne normy moralne. Nie rozważamy tutaj, czy Zosima ma rację, ale to, co dokładnie stwierdził. Zastanówmy się, czy teza Zosimy może być trafnie oddana w logice klasycznej za pomocą funktora implikacji:

$$\text{Boga nie ma } \rightarrow \text{ wszystko jest dozwolone.} \tag{4.7}$$

Teista, czyli osoba uznająca istnienie Boga, musi uznać za prawdę implikację (4.7), ponieważ ta implikacja ma fałszywy poprzednik. Jednakże nie musi uznawać za prawdę zdania (4.6). Można bowiem być teistą i zarazem uważać, że Bóg jest jedynym możliwym ostatecznym źródłem moralności. Co więcej, znaczna liczba filozofów uważała istnienie moralności za mocny, a nawet najmocniejszy, argument za istnieniem Boga. Z drugiej strony wyobraźmy sobie, że ktoś nie zgadza się z tezą (4.7). Musi on być ateistą, ponieważ fałszywa implikacja musi mieć prawdziwy poprzednik. Jednakże ktoś, kto odrzuca tezę (4.6), może uznawać istnienie Boga. Można być teistą, dopuszczając jednocześnie ewentualną inną niż Bóg podstawę prawa moralnego.

Mamy tu mocny argument przeciwko utożsamieniu zdań warunkowych z klasyczną prawdziwościową implikacją. Za pomocą zdań warunkowych wyrażamy niekiedy związki konieczne, związki przyczynowe i jeszcze inne. Niekiedy w zdaniach warunkowych oddajemy wręcz związek wynikania logicznego. Nasz przykład pokazuje, że w takich wypadkach sama znajomość wartości logicznych poprzednika i następnika nie wystarczy do rozpoznania wartości logicznej zdania złożonego. Mamy więc do czynienia z terminami, które nie podlegają zasadzie ekstensjonalności i wykraczają poza aparat pojęciowy logiki klasycznej. Takie terminy określamy jako *nieekstensjonalne* lub jako *intensjonalne*. Wygląda więc na to, że — oprócz klasycznej implikacji — posługujemy się w ważnych sytuacjach zdaniami warunkowymi w innym, nieekstensjonalnym znaczeniu. Najwidoczniej zwrot „jeżeli" jest w języku naturalnym wieloznaczny, a logika klasyczna chwyta tylko jedno z jego znaczeń.

Zwróćmy jeszcze uwagę na trudności związane z funktorem koniunkcji. Jak wiadomo, na gruncie logiki klasycznej funktor ten jest przemienny, to znaczy kolejność czynników nie odgrywa roli. Zatem z wyrażenia $\ulcorner \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \urcorner$ wynika zawsze wyrażenie $\ulcorner \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \urcorner$ i odwrotnie. Przyjrzyjmy się jednak parze zdań: „Rozalia wróciła do domu i położyła się do łóżka", „Rozalia położyła się do łóżka i wróciła do domu", lub parze zdań: „Pankracy zachorował i poszedł do lekarza", „Pankracy poszedł do lekarza i zachorował". W obu wypadkach kolejność czynników wpływa dość mocno na znaczenie zdania. Dzieje się tak dlatego, że w pierwszym wypadku spójnik „i" znaczy tyle, co „i wkrótce potem", a w drugim wypadku tyle, co „i dlatego". Niekiedy spójnik ten znaczy tyle, co „i z tej przyczyny", tak jest w zdaniu „Dominik chodzi bez czapki i choruje". Ma też jeszcze inne znaczenia. Znów, jak się wydaje, logika klasyczna chwyta najbardziej podstawowe, ale nie jedyne z nich. Być może, logika powinna zostać uzupełniona o nowe warianty koniunkcji: koniunkcję czasową, koniunkcję przyczynową i inne. Tak uważa wielu logików. Podobne problemy dotyczą niemalże wszystkich terminów logiki klasycznej, z kwantyfikatorami i znakiem równości włącznie.

Bardzo ciekawe jest to, że — jak się wkrótce przekonamy — pod względem matematycznym różne typy logik modalnych są do siebie łudząco podobne. Trzeba też podkreślić, że rzekoma słabość logiki klasycznej w porównaniu z logikami modalnymi nie jest, bynajmniej, oczywista. Podobnie nie jest zgoła oczywiste to, że logiki modalne autentycznie wykraczają poza sferę ekstensjonalności. Wiele zaawansowanych badań, należących do logiki wyższej, wskazuje na to, że logiki modalne nie wzmacniają istotnie logiki klasycznej, że praktycznie wszelkie analizy, które można przeprowadzić na gruncie logik modalnych, mogą być dokonane również w ramach logiki pierwszego rzędu. To trudne zagadnienie możemy wszakże tylko zasygnalizować. Nie zdołamy zaś go w tej książce serio podjąć.

4.2 Najprostsze logiki nieklasyczne

Stawiające pod znakiem zapytania miarodajność logiki klasycznej zastrzeżenia dają asumpt do rozwijania innych, nieklasycznych, rachunków logicznych. Jeśli bowiem logika klasyczna nie jest zadowalającym rozwiązaniem problemu wynikania, naturalnie wypada zapytać, jak dokładnie powinna wyglądać logika, która takiego rozwiązania by dostarczyła. Zapoznamy się z trzema głównymi logikami lub typami logik nieklasycznych: logikami wielowartościowymi, logikami modalnymi i logiką intuicjonistyczną. Omówimy najprostsze i najbardziej podstawowe logiki, ograniczając się do poziomu rachunku zdań i pomijając — znacznie trudniejszy — problem nieklasycznych ujęć kwantyfikacji.

Logiki wielowartościowe

Logikami wielowartościowymi nazywamy te rachunki, w których posługujemy się większą niż dwa liczbą wartości logicznych. Wartości logiczne różne od prawdy i fałszu mogą być uwzględniane oprócz lub zamiast wartości klasycznych. Zapoznamy się z najprostszymi rachunkami, w których nowe wartości logiczne powstają jako kombinacje wartości klasycznych.

Kombinacje wartości klasycznych. Jak się przekonaliśmy, zasada dwuwartościowości jest problematyczna, a trudności przyjmują najczęściej postać rzeczywistych lub pozornych anomalii prawdziwościowych. Warto więc zastanowić się, co stałoby się z logiką, gdyby luki prawdziwościowe i prawdziwościowe kolizje istniały naprawdę. Jeśli obok klasycznie pojmowanych prawdy i fałszu dopuścimy kolizje i luki prawdziwościowe, to każde zdanie jest bądź prawdą i tylko prawdą, bądź i prawdą, i fałszem, bądź nie jest ani prawdą, ani fałszem, bądź też jest fałszem i tylko fałszem. Zgadzając się wszakże na to, by temu samemu wyrażeniu w jednej interpretacji przysługiwały różne wartości logiczne lub by nie przysługiwała mu żadna wartość, pozbawilibyśmy interpretację statusu funkcji. To znacznie osłabiłoby wydajność rachunku. Zamiast tego można przyjąć, że istnieją cztery wartości:

`1` — prawda i tylko prawda,

`K` — i prawda, i fałsz,

`L` — ani prawda, ani fałsz,

`0` — fałsz i tylko fałsz,

stanowiące kombinacje wartości klasycznych, a interpretacja pozostaje funkcją. Łatwo się zorienotwać, że w tym układzie wartość `1` jest odpowiednikiem klasycznej prawdy, a wartość `0` klasycznego fałszu. W wartości `K` można rozpoznać kolizję prawdziwościową, a w wartości `L` lukę prawdziwościową. Mamy tu do czynienia z najbardziej fundamentalnym ujęciem *wielowartościowości*.

Wartości wyrażeń złożonych. Podważając zasadę dwuwartościowości, chcemy zachować możliwie jak najwięcej z logiki klasycznej. Okazuje się, że możemy dosłownie zastosować wszystkie zależności, wyrażone w definicjach 3–5. W takim razie — żeby się o tym przekonać, wystarczy chwila namysłu

	$\neg$
1	0
K	
L	
0	1

$\wedge$	1	K	L	0
1	1			0
K				
L				
0	0			0

$\vee$	1	K	L	0
1	1			1
K				
L				
0	1			0

Tablica 4.1: Klasyczny fragment matrycy czterowartościowej

nad definicjami 3–5 — tworzona przez nas logika nie powinna różnić się niczym od klasycznego rachunku zdań w tych interpretacjach, w których wszystkie litery zdaniowe przyjmują wartości klasyczne: `1` lub `0`. Wiemy więc już to, co pokazaliśmy na tablicy 4.1. Logiki wielowartościowe, które mają tę własność, określamy jako *normalne*. Większość zależności wciąż pozostaje jednak nieustalona.

Szczęśliwie w naszym przypadku klasyczne definicje 3–5 mogą być dosłownie zastosowane również do wartości nieklasycznych. Jest tak dzięki temu, że wartości nieklasyczne konstruowanej przez nas logiki są po prostu zbiorami wartości klasycznych.

Dla przykładu przyjrzyjmy się dokładnie koniunkcji $\ulcorner \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \urcorner$. Załóżmy, że $V(\mathcal{A}) = \mathtt{K}$ i $V(\mathcal{B}) = \mathtt{1}$. Obydwa czynniki są prawdą. Co prawda, pierwszy jest i prawdą, i fałszem, ale to nie zmienia faktu, że jest — między innymi — prawdą. Skoro zaś obydwa czynniki są prawdą, to wedle definicji 4 koniunkcja również jest prawdą. Z drugiej strony, skoro jeden czynnik jest i prawdą, i fałszem, to wobec tego jeden czynnik jest fałszem. Zatem, jak głosi definicja 4, koniunkcja jest fałszem. Wychodzi na to, że rozważana koniunkcja jest i prawdą, i fałszem, a więc $V(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = \mathtt{K}$. Załóżmy teraz, że $V(\mathcal{A}) = \mathtt{K}$ i $V(\mathcal{B}) = \mathtt{L}$. Tylko jeden czynnik jest prawdą, a więc koniunkcja prawdą nie jest. Z drugiej strony jeden czynnik jest fałszem, a więc koniunkcja również jest fałszem. Ustalamy zatem, że koniunkcja jest fałszem i tylko fałszem, $V(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = \mathtt{0}$. Analogicznie można obliczyć wartość

	¬
1	0
K	K
L	L
0	1

∧	1	K	L	0
1	1	K	L	0
K	K	K	0	0
L	L	0	L	0
0	0	0	0	0

∨	1	K	L	0
1	1	1	1	1
K	1	K	1	K
L	1	1	L	L
0	1	K	L	0

Tablica 4.2: Matryca czterowartościowa z obiema anomaliami

koniunkcji w innych interpretacjach, a także wartości pozostałych wyrażeń złożonych. Zawsze należy po prostu stosować klasyczne definicje funktorów do nowej, czterowartościowej sytuacji. W gruncie rzeczy stosuje się po prostu zależności klasyczne z tym zastrzeżeniem, że rozumowanie dla prawdy i dla fałszu trzeba przeprowadzać oddzielnie, całkiem niezależnie. Rezultat namysłu został zaprezentowany na tablicy 4.2. Mamy tu do czynienia z czterowartościową logiką, która, oprócz wartości klasycznych, uwzględnia kolizję i lukę prawdziwościową. Powiemy, że jest to logika `Anom`, logika, która od klasycznego rachunku zdań różni się tym i tylko tym, że uwzględnia wszelkie anomalie prawdziwościowe.

Można odrzucać zasadę dwuwartościowości, uznając istnienie tylko jednego rodzaju anomalii prawdziwościowych: bądź kolizji, bądź luk. W takim wypadku trzeba by się przyznawać do jakiejś logiki trójwartościowej. Jeśli zgadzamy się na istnienie luk prawdziwościowych, odrzucając zarazem prawdziwościowe kolizje, to możemy po prostu z przedstawionych na tablicy 4.2 wykreślić te wiersze i kolumny, w których występuje wartość `K`. W rezultacie otrzymamy trójwartościową logikę, która dopuszcza luki jako jedyne anomalie prawdziwościowe. Działania charakteryzujące tę logikę prezentujemy

	¬
1	0
L	L
0	1

∧	1	L	0
1	1	L	0
L	L	L	0
0	0	0	0

∨	1	L	0
1	1	1	1
L	1	L	L
0	1	L	0

Tablica 4.3: Matryca trójwartościowa z luką prawdziwościową

na tablicy 4.3 Jeśli natomiast, wykluczając istnienie luk prawdziwościowych, zgadzamy się na prawdziwościowe kolizje, powinniśmy tylko wykreślić z tablicy 4.2 wartość `L`. W rezultacie powstaje trójwartościowa logika, która dopuszcza kolizje jako jedyne anomalie prawdziwościowe. Działania charakteryzujące tę logikę prezentujemy na tablicy 4.4. Zaprezentowaną trójwartościową logikę, która uwzględnia luki prawdziwościowe, określimy jako `Luk`, a tę, która uwzględnia kolizje prawdziwościowe, określimy jako `Kol`.

	¬
1	0
K	K
0	1

∧	1	K	0
1	1	K	0
K	K	K	0
0	0	0	0

∨	1	K	0
1	1	1	1
K	1	K	K
0	1	K	0

Tablica 4.4: Matryca trójwartościowa z kolizją prawdziwościową

Logiki: `Anom`, `Luk` i `Kol` są to najbliższe klasycznemu rachunkowi zdań logiki wielowartościowe. Poza uwzględnieniem obu lub tylko jednego typu anomalii prawdziwościowych logiki te nie różnią się od klasycznego rachunku zdań. Twórcą logiki `Anom` jest Nuel D. Belnap, Jr., logiki `Luk` Stephen C. Kleene, a logiki `Kol` Graham Priest.

Wynikanie a wartości wyróżnione. Formułując definicję 8, przyjęliśmy, że wniosek wynika logicznie z przesłanek wtedy i tylko wtedy, gdy wniosek jest prawdziwy w każdej interpretacji, w której prawdziwe są wszystkie przesłanki. Innymi słowy wynikanie dziedziczy prawdę. Chcąc badać związki logiczne w logikach wielowartościowych, musimy ustalić, które wartości mają być dziedziczone przez związek wynikania logicznego. Takie wartości określamy jako *wartości wyróżnione*, a zbiór wszystkich wartości wyróżnionych danej logiki oznaczamy jako Ω^*, podczas gdy Ω jest zbiorem wszystkich wartości danej logiki. Uogólniając definicję wynikania logicznego na logiki wielowartościowe, zastąpimy po prostu prawdziwość przez wartość wyróżnioną.

Definicja 24 (wynikanie wielowartościowe) *Wyrażenie $\mathcal{B}$ wynika logicznie z wyrażeń: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{B}$ przyjmuje wartość wyróżnioną w każdej takiej interpretacji, w której wszystkie wyrażenia: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ przyjmują wartość wyróżnioną.*

Powiemy więc, że w klasycznym rachunku zdań wartość `1`, to znaczy klasyczna prawda, jest jedyną wartością wyróżnioną. W odniesieniu do logik wielowartościowych tę kwestię należy każdorazowo przedyskutować. W logice `Luk`, podobnie, jak w klasycznym rachunku zdań, jedyną wartością wyróżnioną jest wartość `1`. Natomiast w logice `Anom` i w logice `Kol` za wyróżnione uznamy dwie wartości: `1` oraz `K`. Wyrażenia przyjmujące każdą z tych wartości są bowiem, bądź, co bądź, prawdziwe. Wyrażenia, którym przysługuje wartość `1`, są dokładnie prawdziwe, a wyrażenia, którym przysługuje wartość `K`, są między innymi prawdziwe. Decyzja dotycząca uznania poszczególnych wartości logicznych za wyróżnione jest istotna. Jakakolwiek modyfikacja w tej materii zmienia zwykle tworzoną logikę.

Matryca logiczna. Matryca logiczna jest to sposób charakteryzowania rachunków logicznych. Składa się na nią (a) niepusty zbiór wszystkich wartości logicznych Ω, (b) niepusty zbiór wartości wyróżnionych Ω^*, który jest podzbiorem zbioru Ω i do którego należą wartości dziedziczone przez związek wynikania logicznego, oraz (c) charakterystyka matrycy, to znaczy zestaw działań, które są określone w zbiorze Ω i które charakteryzują wartość wyrażeń złożonych danej logiki. Ten zestaw działań może, ale nie musi, przybrać formę tabel, znanych nam z tablic 2.1, 4.2, 4.3 i 4.4. Nie używając terminu „matryca" zapoznaliśmy się z następującą matrycą charakteryzującą klasyczny rachynek zdań:

$$\Omega = \{\mathtt{1}, \mathtt{0}\},\ \Omega^* = \{\mathtt{1}\},$$

charakterystyka jest podana na tablicy 2.1. Ta matryca znana jest jako *matryca klasyczna*. W wypadku logiki `Anom`

$$\Omega = \{\mathtt{1}, \mathtt{K}, \mathtt{L}, \mathtt{0}\},\ \Omega^* = \{\mathtt{1}, \mathtt{K}\},$$

a charakterystykę matrycy podano na tablicy 4.2. W wypadku logiki `Kol`

$$\Omega = \{\mathtt{1}, \mathtt{K}, \mathtt{0}\},\ \Omega^* = \{\mathtt{1}, \mathtt{K}\},$$

a charkterystykę podano na tablicy 4.4. W wypadku logiki `Luk`

$$\Omega = \{\mathtt{1}, \mathtt{L}, \mathtt{0}\},\ \Omega^* = \{\mathtt{1}\},$$

a charakterystykę podano na tablicy 4.3. Matematyczna teoria matryc logicznych stanowi jeden z najważniejszych działów logiki wyższej.

Drzewa wielowartościowe. Przedstawione logiki wielowartościowe można scharakteryzować za pomocą drzew analitycznych. W klasycznym rachunku zdań wszystkie wyrażenia, które pojawiały się na drzewie, traktowaliśmy jako prawdziwe. W logikach wielowartościowych sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana. Umieścimy na drzewie wszystkie wyrażenia, których wartość logiczna jest dla nas istotna. Wyrażenia, którym zechcemy przypisać jedną z wartości wyróżnionych, oznaczymy symbolem „$\oplus$", a wyrażenia, którym nie wolno przyjąć żadnej z wartości wyróżnionych, symbolem „$\ominus$". Piszemy zatem $\ulcorner \mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$, jeśli oczekujemy, że wartość wyrażenia $\mathcal{A}$ jest wyróżniona, oraz $\ulcorner \mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$, jeśli oczekujemy, że wartość wyrażenia $\mathcal{A}$ nie jest wyróżniona.

Dla wszystkich omówionych rachunków wielowartościowych — `Anom`, `Luk` i `Kol` — przyjmiemy te same, następujące reguły analityczne.

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg\neg\mathcal{A}^{\oplus} \\ | \\ \mathcal{A}^{\oplus} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ \neg\neg\mathcal{A}^{\ominus} \\ | \\ \mathcal{A}^{\ominus} \end{array}$$

Zgodnie z tymi dwiema regułami podwójną negację wolno pominąć — podobnie, jak w logice klasycznej.

$$\begin{array}{c} \surd\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}^{\oplus} \\ | \\ \mathcal{A}^{\oplus} \\ \mathcal{B}^{\oplus} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}^{\ominus}} \\ / & \backslash \\ \mathcal{A}^{\ominus} & \mathcal{B}^{\ominus} \end{array}$$

Koniunkcja przyjmuje wartość wyróżnioną wtedy i tylko wtedy, gdy wartości wyróżnione są przyjmowane przez obydwa czynniki. Brak wartości wyróżnionej koniunkcji oznacza brak wartości wyróżnionej co najmniej jdenego czynnika.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})^{\oplus}} \\ / & \backslash \\ \neg\mathcal{A}^{\oplus} & \neg\mathcal{B}^{\oplus} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})^{\ominus} \\ | \\ \neg\mathcal{A}^{\ominus} \\ \neg\mathcal{B}^{\ominus} \end{array}$$

Negacja koniunkcji przyjmuje wartość wyróżnioną wtedy i tylko wtedy, gdy negacja co najmniej jednego z czynników odnośnej koniunkcji przyjmuje wartość wyróżnioną. W przeciwnym razie negacja żadnego czynnika nie przyjmuje wartości wyróżnionej.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B}^{\oplus}} \\ / & \backslash \\ \mathcal{A}^{\oplus} & \mathcal{B}^{\oplus} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B}^{\ominus} \\ | \\ \mathcal{A}^{\ominus} \\ \mathcal{B}^{\ominus} \end{array}$$

Alternatywa przyjmuje wartość wyróżnioną wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden składnik tej alternatywy przyjmuje wartość wyróżnioną. W przeciwnym razie żaden ze składników nie przyjmuje wartości wyróżnionej.

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})^{\oplus} \\ | \\ \neg\mathcal{A}^{\oplus} \\ \neg\mathcal{B}^{\oplus} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})^{\ominus}} \\ / & \backslash \\ \neg\mathcal{A}^{\ominus} & \neg\mathcal{B}^{\ominus} \end{array}$$

Negacja alternatywy przyjmuje wartość wyróżnioną wtedy i tylko wtedy, gdy wartość wyróżnioną przyjmują negacje obu składników tej alternatywy. W przeciwnym razie negacja co najmniej jednego ze składników nie przyjmuje wartości wyróżnionej.

Dla trzech różnych logik przyjęliśmy te same reguły analityczne. O różnicy między logikami zadecydują tym razem wyłącznie reguły dotyczące uznawania gałęzi za zamkniętą. Weźmiemy pod uwagę trzy możliwości. Gałąź może być uznana za zamkniętą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie wyrażenie $\mathcal{A}$, że na tej gałęzi napisano:

(a) $\ulcorner \mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$ oraz $\ulcorner \mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$,

(b) $\ulcorner \mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$ oraz $\ulcorner \neg\mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$,

(c) $\ulcorner \mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$ oraz $\ulcorner \neg\mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$.

Jeśli przyjmiemy regułę (a), jako jedyną regułę zamykania gałęzi, uzyskamy czterowartościową logikę `Anom`, dopuszczającą wszelkie anomalie prawdziwościowe: luki oraz kolizje. Jeśli, jako reguły zamykania gałęzi, przyjmiemy reguły: (a) oraz (b), i żadnych innych, otrzymamy trójwartościową logikę `Luk`, dopuszczającą luki jako jedyne anomalie prawdziwościowe. Jeśli, jako reguły zamykania gałęzi, przyjmiemy reguły: (a) oraz (c), i żadnych innych, otrzymamy trójwartościową logikę `Kol`, dopuszczającą kolizje jako jedyne anomalie prawdziwościowe. Wreszcie — co może być dość interesującym odkryciem — jeśli, jako reguły zamykania gałęzi, przyjmiemy wszystkie trzy sformułowane tutaj reguły: (a), (b) oraz (c), i żadnych innych, otrzymamy znów klasyczny rachunek zdań. Dzieje się tak dlatego, że reguła (b) wyklucza kolizje, a reguła (c) luki prawdziwościowe.

Badając logiczność wnioskowania, zadajemy w korzeniu wszystkie przesłanki oznaczone symbolem „$\oplus$” i wniosek oznaczony symbolem „$\ominus$”.

Podobnie, jak w logice klasycznej, z zakończonych, ale otwartych, gałęzi można odczytywać interpretacje. które czynią zadość postulatom określonym w korzeniu drzewa. Dla dowolnej litery zdaniowej $\mathcal{A}$, która występuje na rozważanej gałęzi, odczytaniem interpretacji rządzą reguły:

(a) jeśli $\ulcorner \mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$ oraz $\ulcorner \neg\mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$ należą do gałęzi, to $V(\mathcal{A}) = \mathtt{K}$,

(b) jeśli $\ulcorner \mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$ oraz $\ulcorner \neg\mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$ należą do gałęzi, to $V(\mathcal{A}) = \mathtt{L}$,

(c) jeśli $\ulcorner \mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$ należy do gałęzi, zaś $\ulcorner \neg\mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$ nie należy, to $V(\mathcal{A}) = 1$,

(d) jeśli $\ulcorner \neg\mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$ należy do gałęzi, zaś $\ulcorner \mathcal{A}^{\oplus} \urcorner$ nie należy, to $V(\mathcal{A}) = 0$,

(e) jeśli $\ulcorner \mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$ należy do gałęzi, zaś $\ulcorner \neg\mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$ nie należy, to $V(\mathcal{A}) = 0$,

(f) jeśli $\ulcorner \neg \mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$ należy do gałęzi, zaś $\ulcorner \mathcal{A}^{\ominus} \urcorner$ nie należy, to $V(\mathcal{A}) = 1$.

Interpretacja pozostałych liter jest nieistotna. Zauważmy jeszcze, że wszystkie reguły są niepowtarzalne. Wobec tego rozważane tutaj logiki wielowartościowe są rozstrzygalne.

Logiki modalne

Logiki modalne powstały w tym celu, żeby do grona stałych logicznych wprowadzić terminy intensjonalne — co najmniej te terminy, w których są wyrażane modyfikacje prawdy i fałszu. Z czasem niektórzy uczeni zaczęli marzyć o formalizacji dowolnych terminów nieekstensjonalnych. W rzeczywistości współczesne logiki modalne pozwalają na uwzględnienie *zrelatywizowanych wartości logicznych*: *względnej prawdy* i *względnego fałszu.*

Relatywizacja wartości logicznych. Trudność logiki modalnej bierze się stąd, że metody matematyczne ze swej natury ograniczają się do terminów ekstensjonalnych. Metody logiki modalnej opierają się na takim pomyśle, że klasyczne wartości logiczne są traktowane jako *względne.* Relatywizacja jest głównym — jeśli nie jedynym — narzędziem współczesnej logiki, służącym w jej próbach przekraczania granic ekstensjonalności.

Wspomniana *relatywizacja* wartości logicznych, polega na tym, że, ograniczając się zwykle do wartości klasycznych: prawdy i fałszu, nie traktujemy tych wartości jako bezwzględnych, ale jako względne. Na przykład wartość logiczna zdania „Bolesław Chrobry jest królem Polski” może zostać zrelatywizowana do czasu. Rozważane zdanie nie jest w takim ujęciu ani po prostu prawdziwe, ani po prostu fałszywe. Jest ono prawdziwe w pewnym czasie i fałszywe w innym. W szczególności zdanie „Bolesław Chrobry jest królem Polski” było prawdziwe 16 czerwca 1025 r., a fałszywe 18 czerwca 1025 r. (ponieważ król zmarł dzień wcześniej). Zakres potencjalnych relatywizacji jest praktycznie nieograniczony:

- wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w czasie x,
- wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe dla osoby x,
- wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w ramach teorii x,
- wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w stanie x wiedzy,
- wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w stanie rzeczy (sytuacji) x.

Zakres zmienności zmiennej x nazywamy w tych wypadkach *dziedziną relatywizacji* (*względności*), a elementy tej dziedziny nazywamy *punktami relatywizacji*. Jeżeli dziedziną relatywizacji jest, powiedzmy, zbiór punktów czasowych, to mamy do czynienia z modalnościami temporalnymi. Typ logiki modalnej zależy więc od wyboru dziedziny relatywizacji wartości logicznych.

Przeprowadziwszy relatywizację wartości logicznej, jesteśmy gotowi do charakteryzowania logiki modalnej. Rachunkowa strona logiki modalnej opiera się na takim pomyśle, że funkcja interpretacyjna V nie przyporządkowuje wyrażeniu $\mathcal{A}$ wartości logicznej, ale zbiór tych punktów, w których wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdą. Zatem

$$V(\mathcal{A})$$

nie jest już prawdą ani fałszem, ale zbiorem dokładnie tych punktów, w których $\mathcal{A}$ jest prawdą. Jeśli wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdą w punkcie x, to mówimy, że

$$x \in V(\mathcal{A}),$$

a jeśli wyrażenie $\mathcal{A}$ jest fałszem w punkcie x, to mówimy, że

$$x \notin V(\mathcal{A}).$$

Jeśli, na przykład, interesują nas modalności temporalne, to V(Bolesław Chrobry jest królem Polski) stanowi zbiór tych chwil, w których zdanie „Bolesław Chrobry jest królem Polski” jest prawdą. Oprócz zmodyfikowanej we wskazany sposób funkcji interpretacji musimy wskazać dziedzinę relatywizacji, czyli niepusty zbiór punktów relatywizacji, i ewentualnie jedną lub kilka relacji w tym zbiorze.

Jeżeli wyrażenie $\mathcal{A}$ jest zbudowane za pomocą terminu ekstensjonalnego, przejętego z logiki klasycznej, to wartość logiczna wyrażenia $\mathcal{A}$ w punkcie x zależy wyłącznie od wartości komponentów wyrażenia $\mathcal{A}$ w tym samym punkcie x. Jeżeli natomiast wyrażenie $\mathcal{A}$ jest zbudowane za pomocą terminu modalnego, a więc domniemanego terminu nieekstensjonalnego, to wartość logiczna wyrażenia $\mathcal{A}$ w punkcie x może zależeć od wartości komponentów wyrażenia $\mathcal{A}$ w różnych punktach relatywizacji. Zwykle chodzi o punkty pozostające w określonej *relacji* do punktu x. Na tym polega istota różnicy między terminami ekstensjonalnymi a domniemanymi terminami intensjonalnymi we współczesnych logikach modalnych. Do tego też sprowadza się cała tajemnica tych logik.

Zanim zapoznamy się z technicznymi szczegółami konstrukcji logik modalnych, zilustrujmy jeszcze omówioną różnicę między terminami ekstensjonalnymi a terminami nieekstensjonalnymi za pomocą prostego przykładu.

Zwróciliśmy uwagę na pewne wątpliwości, dotyczące klasycznego symbolu koniunkcji. Powiedzieliśmy, że spójnik „i" należy niekiedy rozumieć jako „i potem". Tak jest m.in. w zdaniu „Zuzanna wróciła do domu i położyła się do łóżka". Niech zatem symbol „$\wedge$" będzie, jak dotąd, zwykłym funktorem koniunkcji. Natomiast symbol „$\curlywedge$" niech będzie funktorem koniunkcji czasowej. Wyrażenie $\ulcorner \mathcal{A} \curlywedge \mathcal{B} \urcorner$ należy odczytywać: $\mathcal{A}$ i potem $\mathcal{B}$. Posługując się wyłożoną właśnie koncepcją relatywizacji i modalności, możemy teraz powiedzieć, że wyrażenie $\ulcorner \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \urcorner$ jest prawdziwe w chwili x wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa wyrażenia: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są prawdziwe w chwili x:

$$x \in V(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \text{ wtw } x \in V(\mathcal{A}) \text{ oraz } x \in V(\mathcal{B}).$$

Natomiast wyrażenie $\ulcorner \mathcal{A} \curlywedge \mathcal{B} \urcorner$ jest prawdziwe w chwili x wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w chwili x oraz istnieje taka chwila y, że (a) chwila x jest wcześniejsza od chwili y i (b) wyrażenie $\mathcal{B}$ jest prawdziwe w chwili y:

$$x \in V(\mathcal{A} \curlywedge \mathcal{B}) \text{ wtw } x \in V(\mathcal{A}) \text{ oraz}$$
$$\text{istnieje takie } y, \text{ że } (x \text{ jest wcześniejsze od } y \text{ oraz } y \in V(\mathcal{B})).$$

Widać, że wartość logiczna klasycznej koniunkcji w punkcie x jest scharakteryzowana w sposób analogiczny do klasycznego rachunku zdań i zależy tylko od wartości logicznych w tymże punkcie x, podczas gdy wartość logiczna nieklasycznej koniunkcji w punkcie x zależy od wartości logicznych w różnych punktach, pozostających w określonej relacji do punktu x. Dla uproszczenia w obu wypadkach pominęliśmy kwestię interpretacji. Spójnik „i", który występuje w zdaniu „Zuzanna wróciła do domu i położyła się do łóżka" można oddać za pomocą scharakteryzowanego symbolu „$\curlywedge$". Relacja bycia wcześniejszym jest przykładem wspominanej relacji w dziedzinie relatywizacji.

Modalności aletyczne. Za aletyczne uważamy takie modalności, jak konieczność, możliwość i przygodność. Pojęcia te odgrywają istotną rolę w większości typów wiedzy. Zdaniem niektórych badaczy powinny być też uwzględniane w teorii wynikania logicznego.

Wprowadzamy do alfabetu klasycznego rachunku zdań dwa nowe symbole: funktor konieczności „$\Box$" i funktor możliwości „$\Diamond$". Uzupełniając definicję wyrażenia, przyjmujemy, że, jeśli $\mathcal{A}$ jest wyrażeniem, to wyrażeniem jest również

- $\ulcorner(\Box\mathcal{A})\urcorner$, odczytywane: jest konieczne, że $\mathcal{A}$, musi być tak, że $\mathcal{A}$,
- $\ulcorner(\Diamond\mathcal{A})\urcorner$, odczytywane: jest możliwe, że $\mathcal{A}$, może być tak, że $\mathcal{A}$.

Pod względem kolejności wykonywania działań nowe symbole, zwane *modalnymi*, są równe symbolowi negacji, a więc wcześniejsze od wszelkich funktorów dwuargumentowych. Łatwo się przekonać, że symbole modalne nie są prawdziwościowe, a więc wykraczają poza pole działania klasycznego rachunku zdań. Jeśli $\mathcal{A}$ jest prawdą, to $\ulcorner\Diamond\mathcal{A}\urcorner$ również jest prawdą, jednakże na tej podstawie, że $\mathcal{A}$ jest prawdą, nie możemy ocenić wartości logicznej wyrażenia $\ulcorner\Diamond\mathcal{A}\urcorner$. Powstaje więc pytanie, w jaki sposób można je poddać technikom matematycznym. We współczesnej logice modalnej służy do tego właśnie relatywizacja. W odniesieniu do teorii modalności aletycznych przyjmujemy cztery założenia.

Po pierwsze, wyrażenia nie są prawdziwe ani fałszywe po prostu, ale prawdziwe lub fałszywe w poszczególnch *stanach rzeczy*. Stwierdzenie, że

$$x \in V(\mathcal{A}),$$

rozumiemy tak, że wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w stanie rzeczy x. Na przykład zdanie „Bolesław Chrobry był królem Polski" jest prawdziwe, ponieważ sytuacja, stan rzeczy jest taki, że Bolesław Chrobry był pierwszym królem Polski. Jednak nie musiałoby tak być, lecz mogłoby być inaczej. Gdyby stan rzeczy był inny, gdyby, powiedzmy, Chrobry żył krócej lub cesarz Henryk II dłużej, lub gdyby ten ostatni wygrał walki o Milsko i Łużyce, do koronacji Bolesława mogłoby nie dojść. Mogłoby do niej nie dość z wielu innych powodów. Wówczas — gdyby stan rzeczy był pod interesującym nas względem inny, niż jest — zdanie „Bolesław Chrobry był królem Polski" byłoby fałszywe. Można więc stwierdzić, że zdania nie są po prostu prawdziwe lub fałszywe. Są raczej prawdziwe w określonym stanie rzeczy. Zdanie „Bolesław Chrobry był królem Polski" jest prawdziwe w każdym stanie rzeczy, w którym Bolesław Chrobry został namaszczony na króla Polski, i fałszywe w pozostałych stanach rzeczy. Nazwijmy stan rzeczy, który zachodzi, *aktualnym* stanem rzeczy. Zdanie Bolesław Chrobry był królem Polski" jest prawdziwe, ponieważ w aktualnym stanie rzeczy Bolesław Chrobry był królem Polski. Niepusty zbiór wszystkich stanów rzeczy określamy jako Ω.

Po drugie, wartości logiczne wyrażeń zbudowanych za pomocą symboli klasycznego rachunku zdań, są obliczane analogicznie do logiki klasycznej. Każdej literze zdaniowej wolno przyporządkować dowolny zbiór stanów rzeczy, dowolny podzbiór zbioru Ω, włączając w to zbiór pusty i cały zbiór Ω.

Natomiast

$$x \in V(\neg\mathcal{A}) \text{ wtw } x \notin V(\mathcal{A}), \tag{4.8}$$

$$x \in V(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \text{ wtw } x \in V(\mathcal{A}) \text{ oraz } x \in V(\mathcal{B}), \tag{4.9}$$

$$x \in V(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \text{ wtw } x \in V(\mathcal{A}) \text{ lub } x \in V(\mathcal{B}), \tag{4.10}$$

$$x \in V(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \text{ wtw } x \notin V(\mathcal{A}) \text{ lub } x \in V(\mathcal{B}), \tag{4.11}$$

$$x \in V(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}) \text{ wtw } x \in V(\mathcal{A}) \cap V(\mathcal{B}) \text{ lub } x \notin V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B}). \tag{4.12}$$

Zgodnie z warunkiem (4.8) wyrażenie $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ jest prawdą w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{A}$ nie jest prawdą w tym punkcie. Zgodnie z warunkiem (4.9) wyrażenie $\ulcorner\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}\urcorner$ jest prawdą w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa wyrażenia $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ są prawdą w pukcie x. Zgodnie z warunkiem (4.10) wyrażenie $\ulcorner\mathcal{A} \vee \mathcal{B}\urcorner$ jest prawdą w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno z wyrażeń: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jest prawdą w pukcie x. Zgodnie z warunkiem (4.11) wyrażenie $\ulcorner\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\urcorner$ jest prawdą w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy bądź wyrażenie $\mathcal{A}$ nie jest prawdą w punkcie x, bądź wyrażenie $\mathcal{B}$ jest prawdą w pukcie x. Zgodnie z warunkiem (4.12) wyrażenie $\ulcorner\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}\urcorner$ jest prawdą w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy bądź obydwa wyrażenia: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ są prawdą w punkcie x, bądź żadne z nich nie jest prawdą w tym punkcie.

Po trzecie, sfera dostępnych możliwości może się zmieniać wraz ze stanem rzeczy. Zatem coś, co jest możliwe w jednym stanie rzeczy, może nie być możliwe w innym. Na przykład, inkorporacja Prus do Polski i likwidacja Zakonu Krzyżackiego były możliwe w 1410 r., bezpośrednio po zwycięstwie grunwaldzkim. Po restauracji Zakonu ta możliwość zniknęła. Zatem inkorporacja Prus była możliwa w stanie rzeczy, w którym Jagiełło spod Grunwaldu rusza na Malbork. Natomiast w stanie rzeczy, w którym Jagiełło spod Grunwaldu wraca do Krakowa, była niemożliwa. Na poziomie rachunkowym zależność możliwości od aktualnego stanu rzeczy oddajemy w ten sposób, że z każdym stanem rzeczy x związany jest zbiór stanów rzeczy możliwych z punktu widzenia stanu rzeczy x. Mówimy o nich, że są *osiągalne* (*dostępne*) ze stanu rzeczy x. Jeśli stan rzeczy y jest osiągalny ze stanu rzeczy x, to mówimy, że x sięga do y, symbolicznie:

$$x \prec y.$$

W przeciwnym razie mówimy, że $x \not\prec y$. Osiągalność należy rozumieć tak, że $x \prec y$ wtedy i tylko wtedy, gdy stan rzeczy y mógłby się ziścić, mógłby być aktualny, jeśli tylko aktualny byłby stan rzeczy x.

Po czwarte, możliwość jest po prostu prawdziwością w co najmniej jednym osiągalnym stanie rzeczy, a konieczność prawdziwością w każdym osiągalnym stanie rzeczy:

$$x \in V(\Diamond\mathcal{A}) \text{ wtw dla pewnego } y\colon (x \prec y \text{ oraz } y \in V(\mathcal{A})), \tag{4.13}$$

$$x \in V(\Box\mathcal{A}) \text{ wtw dla każdego } y\colon (\text{jeśli } x \prec y, \text{ to } y \in V(\mathcal{A})). \tag{4.14}$$

Zgodnie z warunkiem (4.13) wyrażenie $\ulcorner\Diamond\mathcal{A}\urcorner$ jest prawdziwe w stanie rzeczy x wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w co najmniej jednym stanie rzeczy dostępnym z x. Zgodnie z warunkiem (4.14) wyrażenie $\ulcorner\Box\mathcal{A}\urcorner$ jest prawdziwe w stanie rzeczy x wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdziwe w każdym stanie rzeczy dostępnym z x. Możliwe jest więc to, co zachodzi w co najmniej jednej osiągalnej możliwości, a konieczne jest to, co zachodzi w każdej osiągalnej możliwości.

Idea analizowania modalności aletycznych za pomocą pojęcia możliwego stanu rzeczy pochodzi od niemieckiego matematyka i filozofa, Gottfrieda Wilhelma Leibniza. Różne możliwe stany rzeczy nazywał on *możliwymi światami.* Ta nazwa jest też popularna współcześnie. Często mówi się o zdaniu prawdziwym w pewnym możliwym świecie zamiast w pewnym możliwym stanie rzeczy. Bliższy namysł nad sformułowanymi założeniami pokazuje, że teoria modalności aletycznych jest w gruncie rzeczy precyzyjnym, matematycznym odpowiednikiem znanej każdemu praktyki *gdybania*, to znaczy, polega na rozważaniu, co by było, gdyby rzeczy miały się w określony sposób, a dokładniej, do czego mogłoby dojść, gdyby rzeczy miały się w określony sposób.

Jeśli przez interpretację w logice modalnej będziemy rozumieć układ złożony ze zbioru Ω punktów relatywizacji, relacji $\prec$ określonej w tym zbiorze i właściwej funkcji interpretacyjnej V:

$$\langle \Omega, \prec, V \rangle, \tag{4.15}$$

to w logice modalnej możemy stosować zwykłe, klasyczne pojęcie wynikania z tą różnicą, że należy wprowadzić do niego moment relatywizacji wartości logicznych.

Definicja 25 (wynikanie modalne) *Wyrażenie $\mathcal{B}$ wynika logicznie z wyrażeń: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{B}$ jest prawdziwe w każdym takim punkcie każdej interpretacji, że w tym punkcie prawdziwe są wszystkie wyrażenia: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$.*

Sens definicji 25 jest taki, że wniosek wynika logicznie z przesłanek wtedy i tylko wtedy, gdy nie da się skonstruować takiego możliwego stanu rzeczy, w którym prawdziwe są wszystkie przesłanki, ale wniosek jest fałszywy. Analogicznie można definiować pozostałe związki logiczne. Taka rozbudowana interpretacja, jak układ (4.15), bywa określana jako *semantyka relacyjna.*

Za pomocą logiki modalnej możemy pdjąć próbę analizy tezy (4.6) starca Zosimy. Teza „jeżeli Boga nie ma, to wszystko jest dozwolone” nie musi być rozumiana po prostu jako implikacja (4.7). Można przyjąć, że w tezie (4.6) chodzi o stwierdzenie koniecznego związku między prawem moralnym a istnieniem Boga-Prawodawcy:

$$\Box\,(\text{Boga nie ma } \rightarrow \text{ wszystko jest dozwolone}). \tag{4.16}$$

Chodziłoby więc o konieczną implikację $\ulcorner\Box(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})\urcorner$, zwaną zwykle *ścisłą implikacją*, a nie o zwykłą, klasyczną implikację $\ulcorner\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\urcorner$. Zdanie (4.16) stwierdza, że nie ma osiągalnej (dostępnej) możliwości, w której nie byłoby Boga, ale obowiązywałoby prawo moralne. Nie mówi jednak ani o tym, czy Bóg jest, ani o tym, czy prawo moralne obowiązuje. Dzięki temu przyjęcie istnienia Boga nie czyni zdania (4.16) automatycznie prawdziwym, a odrzucenie zdania (4.6) nie wymaga odrzucenia istnienia Boga.

W warunkach (4.8)–(4.12) odzyskaliśmy całość klasycznego rachunku zdań. Symbole tego rachunku są w ramach logiki modalnej ekstensjonalne w takim sensie, że wartość logiczna wyrażenia złożonego w punkcie x zależy wyłącznie od wartości logicznych komponentów tego wyrażenia w tym samym punkcie x. Terminy modalne współczesnej logiki są intensjonalne w takim sensie, że wartość logiczna wyrażenia $\mathcal{A}$, zbudowanego za pomocą terminu modalnego, w punkcie x może zależeć od wartości logicznych komponentów wyrażenia $\mathcal{A}$ w różnych punktach relatywizacji.

Zgodnie z zasadą ekstensjonalności wartość logiczna wyrażenia złożonego zależy wyłącznie od wartości logicznych wyrażeń składowych. Relatywizacja pozwala na pewne przekroczenie tej zasady. Mianowicie wartość logiczna wyrażenia w punkcie x może zależeć nie tylko od wartości logicznych wyrażeń składowych w tym samym punkcie x, ale również w innych punktach relatywizacji. Tak jest w wypadku nieekstensjonalnych terminów współczesnej logiki modalnej.

Modalne logiki, które czynią zadość sformułowanym ostatnio czterem warunkom, określamy jako *normalne logiki modalne*. Użycie terminu w liczbie mnogiej nie jest tutaj przypadkowe. Okazuje się bowiem, że takich logik jest wiele.

Normalne logiki modalne. Jak powiedzieliśmy, wartość logiczna wyrażenia niemodalnego w dowolnym punkcie zależy wyłącznie od zawartości tego punktu. Natomiast wartość logiczna wyrażeń zawierających funktory modalne może zależeć ponadto od zawartości innych osiągalnych punktów, mianowicie punktów osiągalnych (dostępnych). Konstruując semantykę relacyjną, jak dotąd przyjmowaliśmy, można całkiem dowolnie decydować o tym, które są połączone relacją osiągania. Prowadzi to do wyników mogących wprawić w osłupienie. Rozważmy najpierw regułę

$$\Box(p \to q), \Box p \vdash \Box q, \tag{4.17}$$

która jest swego rodzaju modalnym odpowiednikiem reguły Modus Ponens. Ta reguła jest prawdziwa w świetle przyjętych przez nas założeń. Przypuśćmy bowiem, że pewien stan rzeczy x byłby dla niej kontrprzykładem, a więc

$$x \in V(\Box(p \to q)), x \in V(\Box p), \text{ ale } x \notin V(\Box q).$$

Zgodnie z zasadą (4.14) znaczy to, że wyrażenia: „$p \to q$", „p" są prawdziwe w każdym punkcie dostępnym z x, ale istnieje co najmniej jeden taki punkt dostępny z x, że wyrażenie „q" nie jest w nim prawdziwe. Wybierzmy taki punkt i nazwijmy go punktem a. Zatem

$$a \in V(p \to q), a \in V(p), \text{ ale } a \notin V(q).$$

Istnieje więc punkt, w którym prawdziwa jest pewna implikacja i jej poprzednik, ale nie jej następnik. To zaś jest sprzeczne z zasadą (4.11). Zatem istnienie kontrprzykładu dla reguły (4.17) nie jest możliwe. Z drugiej strony okazuje się, że w świetle przyjętych założeń obowiązuje reguła

$$\Box p \nvdash p, \tag{4.18}$$

to znaczy, konieczność nie pociąga zachodzenia. Weźmy bowiem pod uwagę taki kontrprzykład:

$$\Omega = \{a, b\}, a \prec b, V(p) = \{b\},$$

w którym mamy dokładnie dwa stany rzeczy: a i b, przy czym relacja osiągania jest taka, że dokładnie a osiąga b, zaś wyrażenie „p jest prawdziwe w stanie rzeczy x i tylko w nim. W takiej interpretacji

$$x \in V(\Box p), \text{ ale } x \notin V(p),$$

ponieważ a nie osiąga samego siebie. Nie przyjęliśmy bowiem, że $a \prec a$. Jest to jeden z najbardziej zdumiewających wyników logiki modalnej. Przecież, jak się wydaje, stąd, że planety muszą okrążać Słońce, z pewnością wynika to, że planety okrążają Słońce. Co być musi, to jest. Bo bliższym namyśle sprawy okazują się wszakże bardziej zawikłane. Jeśli bowiem weźmiemy pod uwagę, powiedzmy, konieczność *moralną*, czyli obowiązek, łatwo sobie uświadomimy, że nie zawsze dzieje się to, co dziać się powinno. Adam i Ewa mieli koniecznie powstrzymać się od spożycia owocu z drzewa poznania dobra i zła. Obywatel ma koniecznie płacić podatki. Okazuje się zatem, że terminy modalne w języku naturalnym są *wieloznaczne*. Zilustrujmy za pomocą przykładów kilka najważniejszych typów konieczności i możliwości:

logiczna — żadna liczba nie *może* być parzysta i nieparzysta,

ontologiczna (filozoficzna) — racjonalny świat *musi* mieć stwórcę,

fizyczna — nikt nie *może* poruszać się szybciej niż światło,

biologiczna — każdy ssak *musi* się odżywiać,

techniczna — nikt nie *może* polecieć z Ziemi na Betelgeuse,

moralna (prawna) — każdy *musi* szanować rodziców.

Konieczność logiczna jest umocowana na prawach logiki. Przyjęcie, że pewna liczba jest parzysta i nieparzysta prowadzi do sprzeczności. Konieczność ontologiczna, fizyczna i biologiczna opiera się na domniemanych prawach, które są odkrywane w ramach odnośnych nauk. Zauważmy, że nie ma żadnej sprzeczności w przypuszczeniu, że jakieś ciało porusza się szybciej niż światło. Przeciwnie, fizyka klasyczna opierała się na takim założeniu. Konieczność techniczna odpowiada temu, co jest wykonalne na określonym etapie rozwoju ludzkich narzędzi. Prawa fizyki nie wykluczają podróży na Betelgeuse, ale obecnie nikt nie mógłby tego dokazać. Niepodobna bowiem zbudować odpowieni statek kosmiczny. Konieczność moralna lub prawna odpowiada temu, co jest nakazane przez określone normy. To, czy niektóre z tych typów modalności nie są tożsame z innymi, i to, czy istnieją inne typy modalności aletycznych, jest kwestią dyskusji. Jest wszakże jasne, że można mówić o różnych sposobach rozumienia odnośnych terminów modalnych. Nie byłoby więc nic dziwnego w tym, żeby różnym ich znaczeniom odpowiadały różne logiki.

Różnicowaniu normalnych logik modalnych służy relacja osiągania. Różne logiki powstają w zależności od tego, jaki margines swobody zostawiamy sobie w odniesieniu do powiązania stanów rzeczy tą relacją. Relacja osiągania może być przede wszystkim

seryjna	$\forall x\colon \exists y\colon x \prec y$,
zwrotna	$\forall x\colon x \prec x$,
symetryczna	$\forall x, y\colon (x \prec y \rightarrow y \prec x)$,
przechodnia	$\forall x, y, z\colon (x \prec y \wedge y \prec z \rightarrow x \prec z)$,
uniwersalna	$\forall x, y\colon x \prec y$.

Seryjność relacji polega na tym, że każdy punkt sięga do co najmniej jednego punktu. Wykluczone są więc *ślepe zaułki*, to znaczy punkty, z których nic nie jest osiągalne. Zwrotność polega na tym, że każdy punkt jest osiągalny z samego siebie. Symetria polega na tym, że punkt jest osiągalny z każdego punktu, do którego sam sięga. Przechodniość polega na tym, że punkty osiągalne w kilku krokach są zarazem osiągalne w jednym kroku. Uniwersalność polega na tym, że relacja zachodzi między całkiem dowolnymi punktami. Przypomnijmy jeszcze, że relację, która jest zarazem zwrotna, symetryczna i przechodnia, określamy jako równoważnościową. Najważniejsze normalne logiki modalne powstają przez ustalenie własności relacji osiągania:

logika `K`	dowolna relacja osiągania,
logika `D`	relacja osiągania seryjna,
logika `T`	relacja osiągania zwrotna,
logika `B`	relacja osiągania zwrotna i symetryczna,
logika `S4`	relacja osiągania zwrotna i przechodnia,
logika `S5`	relacja osiągania równoważnościowa lub uniwersalna.

Zauważmy, że logika `S5` może zostać scharakteryzowana na dwa sposoby. Można przyjąć bądź to, że relacja osiągania jest zarazem zwrotna, symetryczna i przechodnie, bądź to, że jest uniwersalna. Każda relacja uniwersalna jest zwrotna, symetruczna i przechodnia, ale nie odwrotnie.

Różne logiki mogą oznaczać różne związki wynikania, sprzeczności i równoważności logicznej, a także różne zbiory tautologii i antylogii. Żeby uniknąć nieporozumienia, w razie potrzeby uzupełniamy symbol „$\vdash$" nazwą właściwej logiki, umieszczając tę nazwę w dolnym indeksie. Na przykład symbol „$\vdash_{\mathtt{K}}$" oznacza wynikanie w ramach logiki `K`, a symbol „$\vdash_{\mathtt{S5}}$" wynikanie w ramach logiki `S5`. Sformułowane cztery zasady konstrukcji normalnych logik modalnych, bez jakichkolwiek wymogów nakładanych na relację osiągania, charakterysują logikę `K`. Wobec ustaleń (4.17) oraz (4.18) możemy więc powiedzieć, że

$$\Box(p \to q), \Box p \vdash_{\mathtt{K}} \Box q,$$
$$\Box p \nvdash_{\mathtt{K}} p.$$

Zauważmy natomiast, że

$$\Box p \vdash_{\mathtt{T}} p.$$

Załóżmy bowiem, że w pewnej interpretacji $x \in V(\Box p)$. Wobec tego, dla dowolnego y osiągalnego z x jest tak, że $y \in V(p)$. Ponieważ w logice `T` każdy punkt osiąga sam siebie, $x \in V(p)$, a więc nie może istnieć kontrprzykład, w którym relacja osiągania jest zwrotna. Okazuje się więc, że wnioskowanie:

$$\Box p \therefore p$$

jest logiczne w świetle jednej logiki i nielogiczne w świetle innych. Jest to zastanawiające, a takich interesujących przypadków jest znacznie więcej.

Widać więc, że różne logiki modalne mogą wyznaczać różne związki logiczne. Nie znaczy to, bynajmniej, żeby te różne logiki były wolne od wzajmenych powiązań. Zauważmy przykładowo, że każda interpretacja typu S5 jest zarazem interpretacją każdego innego typu, ale nie odwrotnie. Znaczy to, że każdy kontrprzykład typu S5 jest też kontrprzykładem w każdej innej rozważanej logice. Wobec tego, jeśli wynikanie zachodzi na gruncie którejkolwiek z wymienionych logik modalnych, zachodzi też na gruncie logiki S5. Ogólnie

$$\begin{tikzcd} & \mathtt{S5} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathtt{B} \arrow[dr, dash] & & \mathtt{S4} \arrow[dl, dash] \\ & \mathtt{T} \arrow[d, dash] & \\ & \mathtt{D} \arrow[d, dash] & \\ & \mathtt{K} & \end{tikzcd}$$

Tablica 4.5: Krata normalnych logik modalnych

między zbiorami interpretacji zachodzą zależności zaprezentowane na tablicy 4.5. Każda interpretacja właściwa logice znajdującej się na tej tablicy wyżej jest zarazem interpretacją właściwą dla logiki znajdującej się niżej, ale nie odwrotnie. Zbiór interpretacji właściwych logice S5 jest dokładnie iloczynem zbiorów interpretacji właściwych logikom B i S4. Z drugiej strony, każdy przypadek wynikania zachodzący w świetle logiki umieszczonej niżej zachodzi w świetle logiki umieszczonej wyżej. Zbiór przypadków wynikania zachodzących w świetle logiki S5 jest sumą zbiorów tych przypadków, które zachodzą w świetle logik B i S4. Ogólnie mówimy, że logika umieszczona wyżej jest *mocniejsza*, a logika umieszczona niżej jest *słabsza*.

Wielu uczonych uważa, że logika D odpowiada pojęciu konieczności moralnej lub też prawnej. Na gruncie tej logiki obowiązuje, co prawda, reguła $\Box p \nvdash p$ ale również reguła $\Box p \vdash \Diamond p$, zgodnie z którą wszystko, co jest nakazane, jest zarazem dozwolone. Natomiast konieczność fizyczna lub logiczna i podobne pojęcia konieczności byłyby związane z logikami mocniejszymi od D. Mianowicie z logikami, w których obowiązuje reguła $\Box p \vdash p$.

Drzewa modalne. Konstruując logiki modalne za pomocą techniki drzew analitycznych, przyjmujemy reguły analityczne dotyczące terminów logiki klasycznej i dotyczące terminów modalnych. Te pierwsze reguły są dokładnie analogiczne do reguł klasycznych, uwzględniają jedynie relatywizację wartości logicznych.

$$\begin{array}{c} \surd\ x\colon \neg\neg\mathcal{A} \\ | \\ x\colon \mathcal{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \surd\ x\colon \mathcal{A}\wedge\mathcal{B} \\ | \\ x\colon \mathcal{A} \\ x\colon \mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ x\colon \neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})} \\ / & \backslash \\ x\colon \neg\mathcal{A} & x\colon \neg\mathcal{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ x\colon \mathcal{A}\vee\mathcal{B}} \\ / & \backslash \\ x\colon \mathcal{A} & x\colon \mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ x\colon \neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \\ | \\ x\colon \neg\mathcal{A} \\ x\colon \neg\mathcal{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ x\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}} \\ / & \backslash \\ x\colon \neg\mathcal{A} & x\colon \mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ x\colon \neg(\mathcal{A}\to\mathcal{B}) \\ | \\ x\colon \mathcal{A} \\ x\colon \neg\mathcal{B} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ x\colon \mathcal{A}\equiv\mathcal{B}} \\ / & \backslash \\ x\colon \mathcal{A} & x\colon \neg\mathcal{A} \\ x\colon \mathcal{B} & x\colon \neg\mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ x\colon \neg(\mathcal{A}\equiv\mathcal{B})} \\ / & \backslash \\ x\colon \mathcal{A} & x\colon \neg\mathcal{A} \\ x\colon \neg\mathcal{B} & x\colon \mathcal{B} \end{array}$$

Ponadto przyjmujemy reguły dotyczące funktorów modalnych.

$$\begin{array}{c} \surd\ x\colon \Diamond\mathcal{A} \\ | \\ x \prec y \\ y\colon \mathcal{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ x\colon \neg\Box\mathcal{A} \\ | \\ x \prec y \\ y\colon \neg\mathcal{A} \end{array}$$

W tych regułach x jest dowolnym punktem relatywizacji, a y jest punktem, który jeszcze nie wystąpił na gałęzi.

$$\begin{array}{c} *\ x\colon \Box\mathcal{A} \\ x \prec y \\ | \\ y\colon \mathcal{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} *\ x\colon \neg\Diamond\mathcal{A} \\ x \prec y \\ | \\ y\colon \neg\mathcal{A} \end{array}$$

W tych regułach x i y są dowolnymi punktami relatywizacji.

Analogicznie do logiki klasycznej, ale uwzględniając relatywizację wartości logicznych, uznajemy, że gałąź jest zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki x i takie wyrażenie $\mathcal{A}$, że do tej gałęzi należą obydwa napisy: $x\colon \mathcal{A}, x\colon \neg\mathcal{A}$. Punkty relatywizacji możemy nazywać wedle własnego uznania. Na przykład możemy je numerować, przypisywać im kolejne liczby naturalne.

Przedstawione dotąd reguły charakteryzują logikę modalną $\mathtt{K}$. Aby uzyskać mocniejsze normalne logiki modalne, należy przyjąć ponadto reguły wyrażające własności relacji osiągania.

1. W logice $\mathtt{K}$ nie przyjmujemy żadnych reguł ograniczających relację osiągania.

2. Aby scharakteryzować logikę $\mathtt{D}$, przyjmujemy następującą regułę. Jeżeli na pewnej otwartej gałęzi punkt x występuje w jakimkolwiek kontekście, ale dla żadnego y nie napisano na tej gałęzi, że $x \prec y$, to na tej gałęzi należy napisać, że $x \prec z$, przy czym z jeszcze na tej gałęzi nie wystąpił.

3. Aby scharakteryzować logikę $\mathtt{T}$, dla dowolnego punktu x, na otwartej gałęzi, na której ten punkt występuje, należy napisać, że $x \prec x$.

4. Aby scharakteryzować logikę $\mathtt{B}$, jeśli na otwartej gałęzi napisano, że $x \prec y$, to na tej samej gałęzi należy napisać, że $y \prec x$.

5. Aby scharakteryzować logikę $\mathtt{S4}$, jeśli na otwartej gałęzi napisano, że $x \prec y$ oraz $y \prec z$, to na tej samej gałęzi należy napisać, że $x \prec z$.

6. Aby scharakteryzować logikę $\mathtt{S5}$, należy, dla dowolnych punktów x, y, przyjąć, że $x \prec y$. W taki sposób należy stosować reguły rządzące użyciem funktorów modalnych. Aby oszczędzić miejsca, można w ogóle nie pisać, że $x \prec y$.

Zauważmy, że reguły wyznaczające system $\mathtt{K}$, $\mathtt{T}$, $\mathtt{B}$ i $\mathtt{S5}$ gwarantują zakończenie każdego drzewa i stanowią algorytm rozstrzygania. Natomiast reguły wyznaczające system $\mathtt{D}$ i system $\mathtt{S4}$ pozwalają na generowanie nowych punktów semantyki. Z tego powodu podobnie, jak w logice pierwszego rzędu, w tych logikach modalnych możliwe jest powstanie drzew nieskończonych. Reguły dotyczące logiki $\mathtt{B}$ i logiki $\mathtt{S4}$ dają się łatwo ująć w zwykłą formę graficzną.

$$\begin{array}{c} x \prec y \\ | \\ y \prec x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} x \prec y \\ y \prec z \\ | \\ x \prec z \end{array}$$

W logice $\mathtt{S5}$, przyjmując, że dowolne dwa punkty nawzajem do siebie sięgają, możemy po uprościć reguły dotyczące fiunktorów modalnych do następującej postaci. Ponadto przyjmujemy reguły dotyczące funktorów modalnych.

$$\begin{array}{c} \surd\ x\colon \Diamond\mathcal{A} \\ | \\ y\colon \mathcal{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ x\colon \neg\Box\mathcal{A} \\ | \\ y\colon \neg\mathcal{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} *\ x\colon \Box\mathcal{A} \\ | \\ y\colon \mathcal{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} *\ x\colon \neg\Diamond\mathcal{A} \\ | \\ y\colon \neg\mathcal{A} \end{array}$$

Przy czym, jak poprzednio, w dwóch pierwszych regułach x jest dowolnym punktem, a y punktem, który dotąd nie wystąpił na gałęzi. Natomiast w dwóch ostatnich regułach x i y są dowolnymi punktami relatywizacji.

Z otwartych, ale zakończonych, gałęzi można łatwo odczytać wyzanczone interpretacje. Zbiór Ω stanowią dokładnie te punkty, które w dowolnym kontekście pojawiają się na gałęzi. Relacja osiągania łączy dokładnie te punkty x, y, dla których na tej gałęzi napisano, że $x \prec y$. Jeśli, dla dowolnego wyrażenia atomicznego $\mathcal{A}$ i dowolnego punkktu x, na tej gałęzi pojawia się napis: $x\colon \mathcal{A}$, to $x \in V(\mathcal{A})$. Jeśli zaś pojawia się na tej gałęzi napis: $x\colon \neg\mathcal{A}$, to $x \notin V(\mathcal{A})$. Wartości innych wyrażeń atomicznych są obojętne.

Za pomocą zaprezentowanych narzędzi można się łatwo przekonać, że

$$\Box p, \Box q \vdash_{\mathtt{K}} \Box(p \wedge q), \tag{4.19}$$

$$\Diamond p, \Diamond q \nvdash_{\mathtt{K}} \Diamond(p \wedge q). \tag{4.20}$$

Rzeczywiście, zgodnie z regułą (4.19), stąd, że człowiek jest z konieczności zwierzęciem i że człowiek jest z konieczności rozumny, wynika, że człowiek jest z konieczności zwierzęciem rozumnym. Natomiast, zgodnie z regułą (4.20), stąd, że człowiek może być kobietą i że może być mężczyzną, nie wynika, żeby człowiek mógł być zarazem i kobietą, i mężczyzną. Sprawdźmy zależności (4.19) i (4.20) za pomocą drzew analitycznych.

$$\begin{array}{c}
*\ 1\colon \Box p \\
*\ 1\colon \Box q \\
\surd\ 1\colon \neg\Box(p \wedge q) \\
1 \prec 2 \\
\surd\ 2\colon \neg(p \wedge q) \\
2\colon p \\
2\colon q \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc} 2\colon \neg p & 2\colon \neg q \\ \otimes & \otimes \end{array}
\end{array}$$

Jak powiedzieliśmy, reguła (4.19) obowiązuje tym samym we wszystkich logikach mocniejszych niż K, a więc we wszystkich normalnych logikach modalnych.

$$
\begin{array}{rl}
\surd & 1\colon \Diamond p \\
\surd & 1\colon \Diamond q \\
* & 1\colon \neg\Diamond(p \wedge q) \\
 & 1 \prec 2 \\
 & 2\colon p \\
 & 1 \prec 3 \\
 & 3\colon q \\
 & 2\colon \neg(p \wedge q) \\
 & 3\colon \neg(p \wedge q)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
2\colon \neg p & & 2\colon \neg q \\
\otimes & & \begin{array}{cc} 3\colon \neg p & 3\colon \neg q \\ \odot & \otimes \end{array}
\end{array}
$$

Odczytany z tego drzewa kontrmodel

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \{1, 2, 3\}, \\
\prec &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}, \\
V(p) &= \{2\}, \\
V(q) &= \{3\}.
\end{aligned}
$$

Możemy ponadto przekonać się, że

$$\Box p \vdash_{\mathtt{T}} p, \tag{4.21}$$

$$p \vdash_{\mathtt{T}} \Diamond p, \tag{4.22}$$

$$\Box p \vdash_{\mathtt{D}} \Diamond p. \tag{4.23}$$

Wszystkie wymienione reguły inferencyjne należą do klasyki logiki modalnej. Są one kolejno odpowiednikami średniowiecznych reguł: *a necesse ad esse valet consequentia formalis* (z tego, że musi być, wynika logicznie, że jest), *ab esse ad posse valet consequentia formalis* (z tego, że jest, wynika logicznie, że może być), *a necesse ad posse valet consequentia* (z tego, że musi być, wynika logicznie, że może być). Dwie pierwsze reguły nie obowiązują ani w logice K, ani D, a ostatnia nie obowiązuje w logice K.

$1\colon \Box p$
$1\colon \neg\Diamond p$
$\odot$

$$\Omega = \{1\},$$
$$\prec = \varnothing,$$
$$V(p) = \varnothing.$$

$*\ 1\colon \Box p$
$1\colon \neg\Diamond p$
$1 \prec 2$
$2\colon p$
$2\colon \neg p$
$\otimes$

$1\colon \Box p$
$1\colon \neg p$
$\odot$

$$\Omega = \{1\},$$
$$\prec = \varnothing$$
$$V(p) = \varnothing.$$

$*\ 1\colon \Box p$
$1\colon \neg p$
$1 \prec 1$
$1\colon p$
$\otimes$

$1\colon p$
$1\colon \neg\Diamond p$
$\odot$

$$\Omega = \{1\},$$
$$\prec = \varnothing$$
$$V(p) = \Omega.$$

$1: p$

$* \ 1: \neg\Diamond p$

$1 \prec 1$

$1: \neg p$

$\otimes$

Jak wspomnieliśmy, wszelkie logiki modalne opierają się w zasadzie na jednej, tej samej idei, mianowicie na relatywizacji wartości logicznych. Nie ma więc nic dziwnego w tym, że logiki te są do siebie nawzajem bliźniaczo podobne, choć rzekomo dotyczą całkiem innych dziedzin. Poznaliśmy najprostsze teorie modalności aletycznych. Dla porównania przyjrzyjmy się głównym pojęciom należącym do zakkresu logiki temporalnej, to znaczy logiki modalności temporalnych. Zauważmy, że jedyną właściwie różnicą jest to, że umawiamy się traktować punkty relatywizacji nie jako stany rzeczy, ale jako chwile.

Modalności temporalne. Rozważmy przykładowo modalności temporalne: czas przyszły i czas przeszły. Wprowadzamy do alfabetu klasycznego rachunku zdań takie cztery dodatkowe symbole, które uznajemy za stałe logiczne: „F”, „P”, „G” oraz „H”, że, jeśli $\mathcal{A}$ jest wyrażeniem, to wyrażeniem jest też

- $\ulcorner(\mathsf{F}\mathcal{A})\urcorner$, odczytywane: kiedyś będzie tak, że $\mathcal{A}$,
- $\ulcorner(\mathsf{P}\mathcal{A})\urcorner$, odczytywane: kiedyś było tak, że $\mathcal{A}$,
- $\ulcorner(\mathsf{G}\mathcal{A})\urcorner$, odczytywane: zawsze będzie tak, że $\mathcal{A}$,
- $\ulcorner(\mathsf{H}\mathcal{A})\urcorner$, odczytywane: zawsze było tak, że $\mathcal{A}$.

Pod względem kolejności wykonywania działań symbole te są równe symbolowi negacji. Łatwo się przekonać, że wprowadzone przez nas dodatkowe symbole nie są ekstensjonalne (prawdziwościowe). Żeby ustalić wartość logiczną wymienionych wyrażeń złożonych, nie wystarczy wiedzieć, jaka jest wartość logiczna wyrażenia $\mathcal{A}$. Trzeba wiedzieć również odpowiednio, jaka była lub będzie wartość logiczna tego wyrażenia w różnych punktach czasu. Przyjmijmy zatem, dla dowolnych punktów x i y, należących do zbioru Ω, że

$$x \prec y$$

znaczy tyle, że chwila x jest wcześniejsza od chwili y (ewentualnie chwila y jest późniejsza od chwili y). W przeciwnym razie powiemy, że $x \not\prec y$. Możemy wówczas przyjąć, że

$$x \in V(\mathsf{F}\mathcal{A}) \text{ wtw dla pewnego } y : (x \prec y \text{ oraz } y \in V(\mathcal{A})), \tag{4.24}$$

$$x \in V(\mathsf{P}\mathcal{A}) \text{ wtw dla pewnego } y : (y \prec x \text{ oraz } y \in V(\mathcal{A})). \tag{4.25}$$

Znaczy to, że wyrażenie $\ulcorner \mathsf{F}\mathcal{A} \urcorner$ jest prawdą w chwili x wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdą w co najmniej jednej chwili późniejszej niż chwila x. Wyrażenie $\ulcorner \mathsf{P}\mathcal{A} \urcorner$ jest prawdą w chwili x wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdą w co najmniej jednej chwili wcześniejszej niż chwila x. Z drugiej strony

$$x \in V(\mathsf{G}\mathcal{A}) \text{ wtw dla każdego } y : (\text{jeśli } x \prec y, \text{ to } y \in V(\mathcal{A})), \tag{4.26}$$

$$x \in V(\mathsf{H}\mathcal{A}) \text{ wtw dla każdego } y : (\text{jeśli } y \prec x, \text{ to } y \in V(\mathcal{A})). \tag{4.27}$$

Znaczy to, że wyrażenie $\ulcorner \mathsf{G}\mathcal{A} \urcorner$ jest prawdą w chwili x wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdą w każdej chwili późniejszej niż chwila x. Wyrażenie $\ulcorner \mathsf{H}\mathcal{A} \urcorner$ jest prawdą w chwili x wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie $\mathcal{A}$ jest prawdą w każdej chwili wcześniejszej niż chwila x.

Jeżeli potraktujemy jako interpretację łącznie zbiór Ω punktów w czasie, relację $\prec$ następstwa czasowego i właściwą funkcję interpretacyjną V, to możemy stosować w logice temporalnej klasyczną definicję wynikania i analogiczne definicje pozostałych związków logicznych.

Omawiając problem modyfikacji wartości logicznych, zwróciliśmy uwagę na pewne trudności dotyczące funktora koiunkcji. Niektóre z tych trudności, rzeczywiście, można łatwo rozwiązać na gruncie logiki temporalnej. Można zdefiniować symbol koiunkcji czasowej:

$$\ulcorner \mathcal{A} \curlywedge \mathcal{B} \urcorner \overset{\mathsf{df}}{=} \ulcorner \mathcal{A} \wedge \mathsf{F}\mathcal{B} \urcorner,$$

co należy odczytywać: $\mathcal{A}$ i potem $\mathcal{B}$ znaczy tyle, co $\mathcal{A}$ i kiedyś będzie tak, że $\mathcal{B}$. Łatwo się przekonać, że symbol „$\curlywedge$" koniunkcji czasowej, w odróżnieniu od klasycznego symbolu koniunkcji „$\wedge$", nie jest przemienny. Może więc służyć do precyzyjnej analizy takich zdań, jak „Zuzanna wróciła do domu i poszła spać".

Należy zwrócić uwagę, że istotnie różne logiki temporalne powstają w zależności od tego, jakie własności ma relacja $\prec$ następstwa czasowego. Może ona, na przykład, być przechodnia lub nie. Terminy związane z czasem są więc wieloznaczne i zależą od akceptowanych poglądów na własności czasu. W logice temporalnej najwięcej uwagi poświęcono zagadnieniu linearności czasu i jego ewentualnym rozgałęzieniom. My, dla przykładu, przyjrzymy się prostszej kwestii nieskończoności. Jeśli uznamy, że czas nigdy nie będzie miał końca, że nigdy nie nastąpi koniec świata, to wówczas

$$\mathsf{G}\mathcal{A} \vdash \mathsf{F}\mathcal{A}.$$

Jeśli jednak uważamy, że czas kiedyś może się skończyć, że może nastąpić koniec świata, to wówczas takie wynikanie nie zachodzi. Nie ma zgody w odniesieniu do tego, czy związki logiczne mogą zależeć od tak zaawansowanych filozoficznych, czy też światopoglądowych, dywagacji. Ten poważny problem, ta wątpliwość dotyczy *wszystkich* logik modalnych.

Każdy, kto uważnie zapoznał się z teorią modalności aletycznych, widzi od razu, że logiki temporalne mogą być całkiem analogicznie ujęte za pomocą techniki drzew analitycznych.

Logika intuicjonistyczna

Twórca intuicjonistycznej filozofii matematyki, Brouwer, uważał stworzenie miarodajnej logiki za niewykonalne. Jego zdaniem procedura wnioskowania nie daje się ująć w rachunek. Mimo to jego uczeń, Heyting, zaproponował logiczny rachunek, który ma odpowiadać filozofii intuicjonistycznej. Ten rachunek, który nosi miano logiki intuicjonistycznej, jest osobliwą kombinacją logiki wielowartościowej i logiki modalnej.

Logika intuicjonistyczna. Logika intuicjonistyczna zajmuje osobne miejsce wśród logik dewiacyjnych. Jak pamiętamy, dopuszcza ona luki prawdziwościowe, ale nie dopuszcza kolizji. Nie jest to jednak logika trójwartościowa. Gödel udowodnił, że logika intuicjonistyczna, jeśli miałaby zostać potraktowana jako logika wielowartościowa, musiałaby dopuszczać nieskończenie wiele wartości. Z czasem znaleziono dużo bardziej poręczny i ujawniający istotę logiki intuicjonistycznej sposób jej charakteryzowania. Jak zobaczymy, sprowadza się on do pewnej kombinacji wielowartościowości, zwłaszcza koncepcji wartości wyróżnionej, z modalnością, to znaczy z relatywizacją wartości logicznych. Podobnie, jak w odniesieniu do logik wielowartościowych i modalnych, ograniczymy się do logiki zdaniowej, pozostawiając na boku znacznie trudniejszą problematykę kwantyfikacji.

Wyobraźmy sobie twórczy umysł, który dowodzi wciąż nowych twierdzeń. Na dowolnym etapie rozwoju jego teorii litera zdaniowa może być już dowiedziona lub nie. Litera, która raz została dowiedziona, pozostaje taka na zawsze. Litera, które dotąd nie jest dowiedziona, dowiedziona być może, ale nie musi. Rozwój teorii — w pierwotnym zamiarze twórców tej logiki chodzi o teorię matematyczną — można więc sobie wyobrazić jako przyrost najprostszych jednostek informacji, wyobrażanych przez litery zdaniowe. Punkty relatywizacji odpowiadają możliwym etapom rozwoju teorii, a relacja osiągania możliwemu następstwu tych punktów, a więc możliwym kierunkom rozwoju teorii. Inaczej, niż w logice modalnej, punkty dopuszczają luki prawdziwościowe. Wyrażenie jest prawdziwe w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy zostało już na etapie x dowiedzione. Jest w tym punkcie fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy zostało obalone, to znaczy, dowiedziono wyrażenia z nim sprzecznego. Wyrażenia, które nie zostały dowiedzione ani obalone, stanowią lukę prawdziwościową w punkcie x.

Ogólnie powiemy, że interpretacją w logice intuicjonistycznej jest niepusty zbiór Ω punktów relatywizacji. Każdy element zbioru Ω traktujemy jako możliwy etap w procesie rozwoju teorii. Stwierdzenie, że $xy \prec$, znaczy, że rozwój teorii *może* z punktu x doprowadzić do punktu y. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy każda litera zdaniowa dowiedziona w x jest też dowiedziona w y. Dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ zbiór punktów, w których to wyrażenie jest prawdziwe (udowodnione), określamy jako $V(\mathcal{A})$. Właściwościami funkcji V rządzą następujące ustalenia.

Dokonując interpretacji wyrażeń logiki intuicjonistycznej, będziemy przyporządkowywać im tak pojmowane etapy rozwoju teorii. Zatem dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ logiki intuicjonistycznej to, że

$$x \in V(\mathcal{A}),$$

znaczy tyle, że w punkcie x wyrażenie $\mathcal{A}$ jest już konstruktywnie udowodnione. Dla liter zdaniowych wartość funkcji V jest dowolna z tym zastrzeżeniem, że

$$y \in V(\mathcal{A}), \text{ jeśli tylko } x \in V(\mathcal{A}), \text{ oraz } x \prec y.$$

Znaczy to, że jeśli jakiś punkt x należy do zbioru $V(\mathcal{A})$, to do tego zbioru automatycznie należą wszystkie punkty osiągalne z x. To zastrzeżenie stanowi wyraz nieodwołalności raz przeprowadzonego dowodu. W odniesieniu do wyrażeń złożonych przyjmiemy specjalne reguły zastępujące definicje 3–7. Zamiast definicji 4 i 5 przyjmujemy odpowiednio, że

$$x \in V(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \text{ wtw } x \in V(\mathcal{A}) \text{ oraz } x \in V(\mathcal{B}), \tag{4.28}$$

$$x \in V(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \text{ wtw } x \in V(\mathcal{A}) \text{ lub } x \in V(\mathcal{B}). \tag{4.29}$$

To znaczy, że koniunkcję traktujemy jako dowiedzioną wtedy i tylko wtedy, gdy dowiedzione są obydwa jej czynniki, zaś alternatywę wtedy i tylko wtedy, gdy dowiedziony został co najmniej jeden jej czynnik. W odniesieniu do negacji i implikacji przyjmujemy nieco bardziej skomplikowane warunki:

$$x \in V(\neg\mathcal{A}) \text{ wtw nie istnieje taki } y, \text{ że } x \prec y \text{ oraz } y \in V(\mathcal{A}), \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} &x \in V(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \text{ wtw nie istnieje taki } y,\\ &\text{że } x \prec y \text{ oraz } y \in V(\mathcal{A}) \text{ oraz } y \notin V(\mathcal{B}). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Zgodnie z warunkiem negacja jest udowodniona wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest możliwe, żeby na jakimkolwiek dalszym etapie rozwoju teorii dowiedziona została podstawa tej negacji. Implikacja zaś jest udowodniona wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest możliwe, by na jakimkolwiek dalszym etapie rozwoju teorii udowodniono poprzednik, nie dowodząc zarazem następnika. Zatem dowód następnika implikacji ma być automatycznie dostarczony przez dowód poprzednika tej implikacji. Zauważmy, że przyjete właśnie reguły bezpośrednio odpowiadają definicjom

Przy taiej charakterystyce logikiintuicjonistycznej wynikanie może być scharakteryzowane tak, jak w logice modalnej.

Drzewa w logice intuicjonistycznej. Technika drzew analitycznych dostarcza prostej metody rozstrzygania w logice intuicjonistycznej. Podobnie, jak w wypadku logiki wielowartościowej, drzewa będą konstruowane w metajęzyku. Dla każdego typu wyrażenia złożonego reguły analityczne przepisują sposób działania w sytuacji, w której wyrażenie udowodniono w punkcie x, i w sytuacji, w której wyrażenia w punkcie x nie udowodniono. W odniesieniu do koniunkcji przyjmujemy dwie reguły niepowtarzalne.

$$\begin{array}{c} \surd\ +x\colon \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \\ | \\ +x\colon \mathcal{A} \\ +x\colon \mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ -x\colon \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}} \\ / & \backslash \\ -x\colon \mathcal{A} & -x\colon \mathcal{B} \end{array}$$

W odniesieniu do alternatywy również przyjmujemy dwie reguły niepowtarzalne.

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\surd\ +x\colon \mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \\ / & \backslash \\ +x\colon \mathcal{A} & +x\colon \mathcal{B} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ -x\colon \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \\ | \\ -x\colon \mathcal{A} \\ -x\colon \mathcal{B} \end{array}$$

W odniesieniu do negacji przyjmujemy jedną regułę powtarzalną i jedną niepowtarzalną.

$$\begin{array}{c} *\ +x\colon \neg\mathcal{A} \\ x \prec y \\ | \\ -y\colon \mathcal{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \surd\ -x\colon \neg\mathcal{A} \\ | \\ x \prec y \\ +x\colon \mathcal{A} \end{array}$$

Również w odniesieniu do implikacji przyjmujemy jedną regułę powtarzalną i jedną niepowtarzalną.

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{* \ +x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}} \\
\multicolumn{3}{c}{x \prec y} \\
/ & & \backslash \\
-y\colon \mathcal{A} & & +y\colon \mathcal{B}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\surd \ -x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B} \\
| \\
x \prec y \\
+y\colon \mathcal{A} \\
-y\colon \mathcal{B}
\end{array}
$$

Ponadto przyjmujemy reguły rządzące użyciem symbolu „$\prec$”. Relacja taj w logice intuicjonistycznej jest zwrotna i przechodnia podobnie, jak w modalnej logice `S4`. Przyjmujemy więc ustalone tam reguły operowania symbolem relacji osiągalności. Ponadto dla liter zdaniowych przyjmujemy regułę dziedziczenia,

$$
\begin{array}{c}
+x\colon \mathcal{A} \\
x \prec y \\
| \\
+y\colon \mathcal{A}
\end{array}
$$

zgodnie z którą dowolną literę zdaniową $\mathcal{A}$, prawdziwą w punkcie x, należy uznać za prawdziwą w każdym punkcie osiągalnym z x.

Gałąź uznamy za zamkniętą wtedy i tylko wtedy, gdy napisy: $+x\colon \mathcal{A}$, $-x\colon \mathcal{A}$, dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ i dowolnego punktu x, pojawią się na tej gałęzi.

Zważywszy obecność w logice intuicjonistycznej reguł powtarzalnych, odczytując interpretacje z gałęzi drzew analitycznych, należy upewnić się, że wykonano wszystkie niezbędne ruchy analityczne. Wszystkie punkty rozwoju teorii występujące na badanej gałęzi stanowią zbiór Ω. Jeśli na gałęzi widnieje napis $x \prec y$, to przyjmujemy, że punkt y może nastąpić po punkcie x, to znaczy $x \prec y$. Następnie, dla dowolnej litery zdaniowej $\mathcal{A}$, występującej na badanej gałęzi, jeśli $x \in V(\mathcal{A})$ na tej gałęzi, to przyjmujemy, że $x \in V(\mathcal{A})$. Dla wszystkich pozostałych liter przyjmujemy, że $x \notin V(\mathcal{A})$.

Blaski i cienie logik nieklasycznych. Logiki nieklasyczne powstały jako odpowiedź na zarzuty kierowane pod adresem logiki klasycznej. Trzy główne grupy tych zarzutów były związane z rozumieniem wartości logicznych, relewancją i modalnościami.

Problem relewancji okazuje się w znacznej mierze pozorny. Podnoszone trudności wiążą się z tym, że — na mocy zasady niesprzeczności — ze sprzecznego zbioru wynika logicznie każde wyrażenie, i komplementarnie z tym, że tautologia wynika z każdego zbioru wyrażeń. Modyfikacja definicji wynikania, polegająca na wykluczeniu tych granicznych wypadków, w zasadzie rozwiązuje sprawę w ramach logiki klasycznej (definicja 23).

Logiki wielowartościowe znalazły liczne, bardzo udane zastosowania techniczne. Trudno jednak w takim wypaku mówić nadal o logikach. Są to raczej pewne algebry, które nawet nie pretendują do miana modelu związków logicznych. Pełnokrwiste logiki wielowartościowe mają pewne szanse powodzenia tylko na gruncie dość egzotycznych doktryn filozoficznych. Podobnie rzecz się ma z logiką intuicjonistyczną. Matematyka intuicjonistyczna jest tak uboga, że raczej nie ma znaczących perspektyw rozwojowych. Logiki wielowartościowe i logika intuicjonistyczna mogą się rozwijać, ale raczej jako teorie mocno niszowe.

Największe filozoficzne nadzieje wiązano z logikami modalnymi. Były to nadzieje na istotne wzmocnienie siły wyrazu języków teorii logicznych. Te nadzieje są płonne. Jak pokazaliśmy, intensjonalność specyficznych symboli logik modalnych jest dyskusyjna. Ważniejsze wszakże jest to, że logiki modalne nie wykraczają w istotny sposób poza logikę klasyczną. Przypomnijmy sobie, że cała rachunkowa siła logiki modalnej bierze się z relatywizacji wartości logicznych. Jeśli tę relatywizację przeniesiemy do języka przedmiotowego, znajdziemy się w logice pierwszego rzędu. Zamiast mówić:

wyrażenie $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest prawdziwe w punkcie b,

możemy powiedzieć:

wyrażenie $P(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ jest prawdziwe.

Na przykład, zamiast mówić, że zdanie „Bolesław Chrobry jest królem Polski" jest prawdą w 1025 r., powiemy, że zdanie „Bolesław Chrobry jest królem Polski w 1025 r." jest prawdą. Każdy predykat n-argumentowy trzeba po prostu przekształcić w predykat $n + 1$-argumentowy. Funkcję funktorów modalnych mogą wówczas swobodnie spełnić kwantyfikatory.

Ogólnie rzecz biorąc, wolno dzisiaj bez większego ryzyka stwierdzić, że logika standardowa obroniła swoją pozycję. Za podstawowe narzędzie logiczne i punkt odniesienia należy uważać logikę pierwszego rzędu. Nie ma dzisiaj lepszej — ani nawet porównywalnie dobrej — teorii związków logicznych.

Nie chcemy powiedzieć ani tego, że energia włożona w tworzenie i studiowanie logik nieklasycznych została zmarnowana, ani tego, że logika pierwszego rzędu jest wieczna. Logiki nieklasyczne, poza wspomnianymi niszowymi zastosowaniami, przyczyniły się znacząco do lepszego zrozumienia, czym jest logika, jakie założenia leżą u jej podstaw, a nawet jaka jest natura metod rachunkowych. Z drugiej strony logika pierwszego rzędu nie jest wolna od wad lub znaków zapytania. Wspomnieliśmy tylko krótko o trudnej kwestii egzystencjalnych presupozycji tej logiki i programie logik wolnych. Takich szczegółowych trudności jest znacznie więcej. Poszukiwanie teorii lepszej niż logika pierwszego rzędu jest zasadne. Należy wręcz przypuszczać, że podobnie, jak na przełomie XIX i XX w. logika pierwszego rzędu wyparła dawniejszą logikę, zwaną dzisiaj logiką tradycyjną, kiedyś sama logika pierwszego rzędu zostanie zastąpiona lepszą, dzisiaj jeszcze trudną do wyobrażenia teorią. Godzina śmierci logiki pierwszego rzędu pozostaje chyba jednak wciąż odległa.

Rozdział 5

Elementy metalogiki

5.1 Budowa i własności teorii

Podstawową formą uporządkowania wiedzy jest *teoria* (*system*), ujmująca całość wnioskowań na określony temat. Logika pełni w teorii funkcję czynnika porządkującego, swoistego rusztowania. Terminów „teoria” i „system” używamy zamiennie.

Ogólne pojęcie teorii. Teoria w najogólniejszym sensie jest to zbiór wyrażeń wraz ze wszystkimi ich konsekwencjami, ściślej mówiąc, zbiór wyrażeń zamknięty ze względu na operację konsekwencji, na operację dedukcyjnego wysnuwania wniosków. Niech więc X będzie dowolnym zbiorem wyrażeń pewnego języka:

$$X \text{ jest teorią wtedy i tylko wtedy, gdy } C(X) \subseteq X. \tag{5.1}$$

Od razu widać, że sam zbiór $C(X)$ jest teorią dla dowolnego X. Wyrażenia należące do teorii określamy czasem jako *zawartość* tej teorii lub jako jej *twierdzenia*.

Jeżeli zbiór T jest teorią, to każdy taki rozstrzygalny zbiór X, że $C(X) = T$, nazywa się *aksjomatyką* teorii T. Elementy aksjomatyki teorii T nazywają się *aksjomatami* teorii T. Rozstrzygalność zbioru aksjomatów rozumiemy w ten sposób, że istnieje algorytm sprawdzania, czy dane wyrażenie jest aksjomatem, czy nie. Jeśli aksjomatów jest skończenie wiele, można je po prostu wymienić. Jeśli jednak jest ich nieskończenie wiele, trzeba je opisać tak, by nie mogła powstać wątpliwość odnośnie do zawartości aksjomatyki. Zbiory rozstrzygalne nazywają się też zbiorami obliczalnymi. Aksjomatyka teorii T jest to więc rozstrzygalny zbiór wyrażeń, z których wynikają wszystkie twierdzenia teorii T i tylko one.

Mówimy, że teoria T jest *aksjomatyzowalna*, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedna aksjomatyka tej teorii T. Aksjomatyka, która ma skończenie wiele elementów, nazywa się skończoną, a taka aksjomatyka, która ma nieskończenie wiele elementów, nazywa się nieskończoną. Mówimy, że teoria T jest *skończenie* aksjomatyzowalna, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najmniej jedna skończona aksjomatyka tej teorii T. O teorii, która jest aksjomatyzowalna, ale wszystkie jej aksjomatyki są nieskończone, mówimy, że jest *nieskończenie* aksjomatyzowalna. Widać, że jedna teoria może mieć wiele różnych aksjomatyk. Wszystkie one muszą być jednak wzajemnie równoważne, w przeciwnym bowiem razie nie byłyby aksjomatykami tej samej teorii.

Teorie, które są scharakteryzowane w taki sposób, że ocena zawartości tych teorii może być dokonana metodami czysto rachunkowymi, to znaczy, wymaga wykonywania wyłącznie oceny zewnętrznego kształtu wyrażeń, określamy jako teorie *sformalizowane*.

Teoria aksjomatyczna. Pojęcie teorii *aksjomatyzowalnej* należy odróżniać od pojęcia teorii *aksjomatycznej*. Aksjomatyzowalność jest — jak już wiemy — obiektywną własnością zbioru wyrażeń. Natomiast aksjomatyczność jest sposobem opisu zbioru wyrażeń. Między tymi pojęciami zachodzi taki związek, że tylko aksjomatyzowalna teoria może być ujęta jako teoria aksjomatyczna. Można powiedzieć, że teoria jest aksjomatyczna, kiedy została aktualnie opisana przez podanie aksjomatyki. Każda teoria aksjomatyzowalna jest natomiast potencjalnie teorią aksjomatyczną.

Czynność opisywania teorii jako teorii aksjomatycznej nazywa się *aksjomatyzacją*. Aksjomatyzacja polega na precyzyjnym wskazaniu, które wyrażenia teorii są uznawane za aksjomaty. Zamykając listę aksjomatów, automatycznie ustala się zawartość teorii. Składają się na nią wszystkie te i tylko te wyrażenia, które wynikają logicznie z aksjomatów. Wyrażenia, które wynikają z aksjomatów teorii T, nazywamy *twierdzeniami* lub *tezami* tej teorii. Twierdzenia dowolnej teorii aksjomatycznej dzielą się więc na dwie grupy: aksjomaty, które są też nazywane twierdzeniami *pierwotnymi*, i pozostałe twierdzenia, które określamy jako *wtórne* lub *pochodne* od aksjomatów. Podstawową procedurą znajdowania twierdzeń jest dowodzenie (wyprowadzanie).

Definicja 26 (dowód) *Niech X będzie zbiorem aksjomatów teorii T. Dowód (wyprowadzenie) wyrażenia $\mathcal{A}$ w teorii T jest to skończony ciąg wyrażeń teorii T spełniający dwa warunki:* (a) *każde wyrażenie w tym ciągu jest bądź aksjomatem teorii T, bądź tautologią, bądź wynika logicznie z wcześniejszych wyrażeń tego ciągu,* (b) *ostatnim wyrażeniem w tym ciągu jest wyrażenie $\mathcal{A}$.*

Wyrażenia należące do dowodu nazywamy *wierszami* dowodu, dołączanie kolejnych wyrażeń nazywamy *krokami* dowodowymi, a ostatnie wyrażenie nazywamy wyrażeniem *dowodzonym*. Zamiast o dowodzie i dowodzeniu mówimy zamiennie o *wyprowadzeniu* i *wyprowadzaniu*. O wyrażeniach, dla których istnieje dowód na gruncie teorii T, mówimy że są *dowodliwe* (*wyprowadzalne*) w teorii T (względnie w ramach teorii T, na gruncie teorii T). O pozostałych wyrażeniach mówimy, że są niedowodliwe (niewyprowadzalne) w tej teorii. Jedno wyrażenie może mieć na gruncie danej teorii różne dowody. Zwykle tych dowodów bywa nieskończenie wiele, a uproszczenie znanych dowodów jest traktowane jako osiągnięcie naukowe. Widać, że takie terminy, jak „twierdzenie", „teza", „dowodliwy" i „wyprowadzalny" są synonimami.

Dwa pojęcia dowodu. Musimy wypowiedzieć tutaj niezwykle ważną uwagę o wieloznaczności terminu „dowód". Nieświadomość tej wieloznaczności doprowadziła i wciąż jeszcze prowadzi do wielu poważnych błędów i nieporozumień. Chcemy podkreślić, że używamy nazwy „dowód" w dwóch istotnie różnych znaczeniach. W pierwszym znaczeniu „udowodnić" znaczy mniej więcej tyle, co „wyprowadzić", „wydedukować", a w drugim znaczeniu „udowodnić" znaczy mniej więcej tyle, co „wykazać", „definitywnie uzasadnić". W pierwszym wypadku można mówić o *metodologicznym* pojęciu dowodu, a w drugim o *epistemologicznym* pojęciu dowodu.

Omawiając pojęcie teorii aksjomatycznej, używamy specjalnie spreparowanego, technicznego pojęcia dowodu. Jest to właśnie dowód w sensie metodologicznym. Dowód znaczy tutaj mniej więcej tyle, co skończony ciąg wyrażeń połączonych związkiem wynikania logicznego. Jeśli udowodniliśmy, w tym sensie, wyrażenie $\mathcal{A}$ w ramach teorii T, to wiemy, że wyrażenie $\mathcal{A}$ wynika logicznie z aksjomatów tejże teorii T. Zauważmy, że tak pojęty dowód jest zrelatywizowany do teorii. Właściwie można udowodnić dowolne wyrażenie, ponieważ można skonstruować teorię o praktycznie dowolnych aksjomatach.

Niekiedy, również w mowie potocznej, używamy nazwy „dowód" w innym sensie. Pojmujemy wówczas dowód jako najmocniejsze, definitywne uzasadnienie, uzasadnienie niepozostawiające miejsca na wątpliwości. Jest to właśnie dowód w sensie epistemologicznym. Przy czym wcale nie musi ono mieć charakteru dedukcji, przeciwnie, często jest indukcją. W takim sensie mówimy, że kolejne powtórzenia eksperymentu Michelsona i Morleya *dowodzą* tego, że prędkość światła nie dodaje się do innych prędkości. Takie pojęcie dowodu nie jest zrelatywizowane do żadnej teorii. Co więcej, właśnie to drugie pojęcie dowodu jest pierwotne.

Można powiedzieć, że dowód w sensie metodologicznym dowodzi w sensie epistemologicznym tego i tylko tego, że dane wyrażenie wynika z aksjomatów.

Nieostrożność w użyciu terminu „dowód" prowadzi, jak wspomnieliśmy, do wielu nieporozumień. Wielu ludzi bierze dowód-wyprowadzenie za dowód-

-uzasadnienie. Domagają się uznania pewnych twierdzeń tylko na tej podstawie, że te twierdzenia wyprowadzono z aksjomatów jakiejś teorii. Powinno być całkiem jasne, że tego typu roszczenia są całkiem bezpodstawne.

W związku z omawianym nieporozumieniem można spotkać się z poglądem, że aksjomaty nie mają dowodu. Chwila namysłu nad definicją 26 wystarczy, żeby się przekonać, że każdy aksjomat ma dowód. Mianowicie każdy aksjomat sam jest swoim własnym dowodem o długości jednego wiersza. Aksjomaty teorii T są więc dowodliwe w tej teorii. Jeśli natomiast aksjomaty traktujemy jako uzasadnienie wszystkich pochodnych twierdzeń teorii, to w takim sensie aksjomaty nie mają w tej teorii dowodu — wymagają uzasadnienia zewnętrznego względem teorii T. Analogicznie do metodologicznego i epistemologicznego pojęcia dowodu można więc mówić o metodologicznym i epistemologicznym pojęciu aksjomatu.

Budowa teorii elementarnej. Najważniejszą, trudną do przecenienia grupą sformalizowanych teorii aksjomatycznych są teorie oparte na logice pierwszego rzędu (ze znakiem równości lub bez niego). Takie teorie nazywają się teoriami pierwszego rzędu lub teoriami *elementarnymi*. Poświęcimy im obecnie sporo uwagi.

Alfabet teorii elementarnej T powstaje w ten sposób, że z alfabetu logiki standardowej usuwamy wszystkie litery schematyczne. W ich miejsce do alfabetu wprowadzamy pewną liczbę stałych terminów, które nazywamy terminami *pierwotnymi* teorii T. Terminami pierwotnymi mogą być predykaty pierwszego rzędu, nazwy jednostkowe i symbole funkcyjne. W ten sposób ustalamy *bazę terminologiczną* teorii T. Definicja wyrażenia teorii T, mając za punkt wyjścia tę bazę terminologiczną, jest już całkiem analogiczna do definicji wyrażenia logiki standardowej. Litery zdaniowe po prostu znikają z definicji, a miejsce pozostałych liter schematycznych zajmują odpowiednie terminy pierwotne teorii T. Ustalając aksjomatykę, stosujemy znane nam już, ogólne zasady, obowiązujące dla wszelkich teorii aksjomatycznych. Posługujemy się też zwykłym pojęciem dowodu, przy czym przez tautologie logiczne i reguły logiczne rozumiemy odpowiedniki tautologii i reguł logicznych logiki pierwszego rzędu, należące języka teorii T lub stosowane do wyrażeń tej teorii.

Terminy pierwotne teorii T określamy jako terminy *specyficzne* (*swoiste*) tej teorii w przeciwieństwie do symboli przejętych do alfabetu teorii T z logiki standardowej. Zasób terminów specyficznych może być powiększany. Symbole, które są terminami specyficznymi teorii T, ale nie weszły w skład jej alfabetu, nazywają się *terminami wtórnymi* teorii T. Terminy wtórne wolno wprowadzać, o ile sposób ich rozumienia zostanie scharakteryzowany za pomocą *definicji*. Definicje są to aksjomaty spełniające określone warunki, które jeszcze zostaną omówione. Rozszerzanie zasobu terminów za pomocą definicji nie stanowi istotnej zmiany w teorii. Wyrażenia zawierające terminy wtórne są bowiem, w pewnym sensie, na mocy definicji, skrótami odpowiednich wyrażeń niezawierających terminów wtórnych. Jeśli więc dwie teorie elementarne przynajmniej zasadniczo dają się sformułować w oparciu o tę samą bazę terminologiczną, to uznajemy je za sformułowane w tym samym języku.

Tautologie i reguły logiczne teorii elementarnej. Teorie elementarne opierają się na logice pierwszego rzędu w tym sensie, że reguły logiki pierwszego rzędu znajdują zastosowanie w odniesieniu do wyrażeń danej teorii elementarnej. Aby precyzyjnie powiedzieć, na czym polega zastosowanie reguł logicznych do wyrażeń teorii elementarnej, musimy objaśnić pojęcie formalnego schematu wyrażenia teorii elementarnej.

Weźmy pod uwagę dowolne wyrażenie $\mathcal{A}$ należące do języka teorii elementarnej T. W wyrażeniu $\mathcal{A}$ dokonamy jednorodnego podstawienia odpowiednich liter schematycznych za wszystkie terminy specyficzne teorii T. W szczególności za n-argumentowe predykaty podstawimy n-argumentowe litery predykatowe, za nazwy jednostkowe i n-argumentowe symbole fukcyjne odpowiednie litery nazwowe. Zadbamy przy tym, żeby za różne terminy teorii T podstawiać różne litery schematyczne. W ten sposób uzyskamy wyrażenie logiki standardowej. O tym wyrażeniu powiemy, że jest ono *schematem formalnym* wyrażenia $\mathcal{A}$. Zauważmy, że wyrażenia teorii T niezawierające w ogóle specyficznych terminów tej teorii nie wymagają wprowadzania żadnych zmian, są bowiem zarazem wyrażeniami logiki standardowej. Takie wyrażenia same są swoimi schematami formalnymi. Przykładem wyrażenia tego rodzaju jest tautologia „$\forall x\colon x = x$”.

Niech więc $n \leqslant 0$ będzie liczbą naturalną, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$ niech będą wyrażeniami teorii T, zaś $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2 \ldots, \mathcal{A}'_n, \mathcal{B}'$ niech kolejno będą schematami formalnymi tych wyrażeń. Zależność:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$$

zachodzi na gruncie teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy zależność

$$\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \ldots, \mathcal{A}'_n \vdash \mathcal{B}'$$

zachodzi na gruncie logiki pierwszego rzędu. W szczególności dotyczy to sytuacji, w której $n = 0$, to znaczy tautologii. Wyrażenie teorii T jest więc tautologią (logiczną) tej teorii wtedy i tylko wtedy, gdy schemat formalny tego wyrażenia jest tautologią logiki pierwszego rzędu.

Znana nam technika drzew analitycznych jest tak uniwersalna, że wyrażenia teorii elementarnych mogą być też sprawdzane za pomocą drzew bezpośrednio, bez potrzeby wyraźnej transformacji w schematy formalne.

Na przykład wyrażenie „$\neg\exists x\colon (x < y) \wedge \neg x < y)$” jest tautologią każdej elementarnej teorii mniejszości, wyrażenie „$\neg\exists x\colon (x \in y \wedge \neg x \in y)$” jest tautologią każdej elementarnej teorii zbiorów, a wyrażenie „$\neg\exists x\colon ((x \text{ kocha } y) \wedge \neg(x \text{ kocha } y))$” jest tautologią każdej elementarnej teorii miłości. Jest tak dlatego, że wspólny tym wyrażeniom schemat formalny, to znaczy wyrażenie „$\neg\exists x\colon (P(x,y) \wedge \neg P(x,y))$” jest tautologią logiki pierwszego rzędu. Ten schemat formalny znajdujemy podstawiając odpowiednio za dwuargumentowy predykat: „$<$”, „$\in$” lub „kocha” dwuargumentową literę schematyczną „P”. Tylko dla zachowania powszechnej konwencji pisaliśmy bowiem „$x < y$”, „$x \in y$” lub „x kocha y” zamiast odpowiednio: „$<(x,y)$”, „$\in(x,y)$” lub „kocha(x,y)”. Analogicznie przedstawia się sprawa logicznych reguł inferencyjnych. W ten sposób logika pierwszego rzędu stanowi swego rodzaju szkielet lub rusztowanie wszystkich teorii elementarnych.

Generalizacja. Dość rozpowszechnioną praktyką jest formułowanie w ramach teorii elementarnych wyrażeń otwartych. Omawiając pojęcie spełniania, powiedzieliśmy już, że prawdziwość takich wyrażeń utożsamiamy ze spełnianiem przez każdy ciąg przedmiotów. Wobec tego, oprócz logicznych tautologii i reguł, które można znaleźć za pomocą drzew semantycznych, w teoriach elementarnych trzeba przyjąć jeszcze regułę *generalizacji*, która zezwala na nieograniczone poprzedzanie twierdzeń kwantyfikatorem ogólnym i zarazem na opuszczanie kwantyfikatora ogólnego, który jest głównym funktorem twierdzenia:

> wyrażenie $\mathcal{A}$ jest twierdzeniem teorii elementarnej T wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej zmiennej indywidualnej α wyrażenie $\ulcorner\forall\alpha\colon \mathcal{A}\urcorner$ również jest twierdzeniem teorii T.

Zauważmy, że ta reguła obowiązuje, co prawda, w procedurze dowodowej, ale wolno ją stosować wyłącznie do twierdzeń. Nie jest to więc typowa reguła inferencyjna. Uzasadnienie reguły generalizacji w oparciu o pojęcie spełniania nie nastręcza jednak trudności. Na stosowaniu tej reguły w pamięci opiera się m.in. powszechna praktyka podstawiania za zmienne wolne w twierdzeniach. Akceptacja reguły generalizacji, obok typowych reguł logiki pierwszego rzędu, sprawia bowiem tyle, że takie wyrażenia otwarte, jak „$x \leqslant y \vee x \geqslant y$”, są w ramach teorii praktycznie nieodróżnialne od odpowiednich wyrażeń domkniętych typu „$\forall x,y\colon (x \leqslant y \vee x \geqslant y)$”, będąc właściwie ich skrótami myślowymi, pod warunkiem wszakże, że odnośne wyrażenia są twierdzeniami teorii. Którekolwiek z pary takich wyrażeń — powtórzmy, o ile są one twierdzeniami — znajdzie się w dowodzie, drugie może być natychmiast dołączone do tego dowodu na mocy reguły generalizacji.

Arytmetyka Peano'a. Giuseppe Peano zaksjomatyzował arytmetykę liczb naturalnych jako teorię elementarną. Zapoznamy się z tą bardzo ważną teorią, która jest nazywana *arytmetyką Peano'a*, w skrócie `PA`. Za terminy pierwotne teorii `PA` uznamy: nazwę jednostkową „0", jednoargumentowy symbol fukcyjny „`S`" i dwa dwuargumentowe symbole funkcyjne: „·" i „+". Za uniwersum dyskursu uznajemy zbiór liczb naturalnych. Jest on też zakresem wszystkich zmiennych indywidualnych. Można podać następujące objaśnienia terminów pierwotnych arytmetyki. Symbol „0" jest nazwą liczby zero. Jeżeli α jest dowolnym termem arytmetyki, to nazwę $\ulcorner \mathtt{S}\alpha \urcorner$ należy odczytywać: następnik liczby α. Następnikiem liczby zero jest liczba jeden, następnikiem liczby jeden jest liczba dwa itd. Symbol „·" jest znakiem mnożenia, a symbol „+" dodawania. Aksjomatami teorii `PA` są wyrażenia

$$\forall x\colon \forall y\colon (\mathtt{S}x = \mathtt{S}y \to x = y), \tag{5.2}$$

$$\forall x\colon 0 \neq \mathtt{S}x, \tag{5.3}$$

$$\forall x\colon (x \neq 0 \to \exists y\colon x = \mathtt{S}y), \tag{5.4}$$

$$\forall x\colon x + 0 = x, \tag{5.5}$$

$$\forall x\colon \forall y\colon x + \mathtt{S}y = \mathtt{S}(x + y), \tag{5.6}$$

$$\forall x\colon x \cdot 0 = 0, \tag{5.7}$$

$$\forall x\colon \forall y\colon x \cdot \mathtt{S}y = (x \cdot y) + x, \tag{5.8}$$

a ponadto wyrażenie:

$$\mathcal{A}(0) \land \forall x\colon (\mathcal{A}(x) \to \mathcal{A}(\mathtt{S}x)) \to \forall x\colon \mathcal{A}(x), \tag{5.9}$$

zwane *zasadą indukcji matematycznej*, jest aksjomatem dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$. Wedle tej zasady, jeśli wyrażenie $\mathcal{A}$ jest spełnione przez liczbę zero, a ponadto jest spełnione przez następnik każdej liczby, która spełnia to wyrażenie, to wyrażenie $\mathcal{A}$ jest spełnione przez wszystkie liczby naturalne. Aksjomat (5.2) stwierdza, że liczby naturalne mające równe następniki same też są równe. Aksjomat (5.3) zaprzecza, żeby zero było następnikiem jakiejkolwiek liczby naturalnej, zaś aksjomat (5.4) stwierdza, że każda inna liczba naturalna jest następnikiem jakiejś liczby naturalnej. Aksjomaty (5.5) i (5.6) określają własności dodawania: dodanie zera do dowolnej liczby naturalnej nie zmienia tej liczby, zaś dodanie następnika liczby naturalnej y daje liczbę o jeden większą niż dodanie liczby y. Aksjomaty (5.7) i (5.8) określają własności mnożenia: mnożenie przez zero daje zero, a mnożenie liczby naturalnej

x przez następnik liczby naturalnej y daje liczbę o x większą niż mnożenie liczby x przez liczbę y. Dla przykładu podamy definicję kilku terminów wtórnych. Jako terminy wtórne dołączymy do teorii $\mathtt{PA}$ predykaty nieostrej i ostrej mniejszości:

$$\forall x\colon \forall y\colon (x \leqslant y \equiv \exists z\colon x + z = y), \tag{5.10}$$

$$\forall x\colon \forall y\colon (x < y \equiv x \leqslant y \wedge x \neq y), \tag{5.11}$$

a także definicje nazw jednostkowych kilku liczb naturalnych:

$$1 = \mathtt{S}0, \quad 2 = \mathtt{SS}0, \quad 3 = \mathtt{SSS}0, \quad 4 = \mathtt{SSSS}0, \quad 5 = \mathtt{SSSSS}0, \ \ldots \tag{5.12}$$

Podamy też dla przykładu w pełni rozwinięty dowód następującego twierdzenia arytmetyki:

$$2 \neq 3. \tag{5.13}$$

Dowód:

1.	$\forall x\colon \forall y\colon (\mathtt{S}x = \mathtt{S}y \to x = y)$	aksjomat (5.2)
2.	$\forall y\colon (\mathtt{SS}0 = \mathtt{S}y \to \mathtt{S}0 = y)$	1
3.	$\mathtt{SS}0 = \mathtt{SSS}0 \to \mathtt{S}0 = \mathtt{SS}0$	2
4.	$\forall y\colon (\mathtt{S}0 = \mathtt{S}y \to 0 = y)$	1
5.	$\mathtt{S}0 = \mathtt{SS}0 \to 0 = \mathtt{S}0$	4
6.	$\mathtt{SS}0 = \mathtt{SSS}0 \to 0 = \mathtt{S}0$	3, 5, syll
7.	$\forall x\colon 0 \neq \mathtt{S}x$	aksjomat (5.3)
8.	$0 \neq \mathtt{S}0$	7
9.	$\mathtt{SS}0 \neq \mathtt{SSS}0$	6, 8 modus ponens
10.	$2 \neq 3$	9, definicje (5.12)

W arytmetyce $\mathtt{PA}$ można dowodzić rónież znacznie bardziej zaawansowanych twierdzeń. Na przykład, dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ arytmetyki, twierdzeniem teorii $\mathtt{PA}$ jest wyrażenie:

$$\exists x\colon \mathcal{A}(x) \to \exists x\colon (\mathcal{A}(x) \wedge \forall y\colon (y < x \to \neg\mathcal{A}(y))). \tag{5.14}$$

Schemat (5.14) nazywa się *zasadą minimum*. Stwierdza on, że jeśli wyrażenie $\mathcal{A}$ jest spełnione przez co najmniej jedną liczbę naturalną, to istnieje najmniejsza liczba naturalna spełniająca to wyrażenie $\mathcal{A}$.

Teoria mnogości Zermelo'i. Ernst Zermelo podał aksjomatykę teorii mnogości jako teorii pierwszego rzędu. Teorię tę nazwiemy `Zer`. Do uniwersum dyskursu należą wyłącznie zbiory. Jedynym terminem pierwotnym teorii `Zer` jest dwuargumentowy predykat „$\in$”, za którego pomocą definiujemy w znany nam już sposób szereg terminów wtórnych. Aksjomatami teorii `Zer` są wszystkie wyrażenia:

$$\forall y\colon \exists x\colon \forall z\colon (z \in x \equiv z \in y \wedge \mathcal{A}(z)), \tag{5.15}$$

w których $\mathcal{A}$ jest dowolnym wyrażeniem teorii, oraz wyrażenia:

$$\forall x, y\colon (\forall z\colon (z \in x \equiv z \in y) \to x = y), \tag{5.16}$$

$$\forall x\colon \exists y\colon \forall z\colon (z \in y \equiv \exists u\colon (z \in u \wedge u \in x)), \tag{5.17}$$

$$\forall x\colon \exists y\colon \forall z\colon (z \in y \equiv z \subseteq x), \tag{5.18}$$

$$\forall x, y\colon \exists w\colon \forall z\colon (z \in w \equiv z = x \vee z = y), \tag{5.19}$$

$$\exists x\colon (\exists y\colon y \in x \wedge \forall y\colon (y \subset x \to \exists z\colon (y \subset z \wedge z \subset x))). \tag{5.20}$$

Wyrażenia — a jest ich nieskończenie wiele — opisane w schemacie (5.15) nazywają się aksjomatami wyróżniania. Stwierdzają one, że w każdym zbiorze można wyróżnić podzbiór złożony z dokładnie tych przedmiotów, które spełniają zadane wyrażenie $\mathcal{A}$. Taki podzbiór może być pusty, ale istnieje. Wyrażenie (5.16) nazywa się aksjomatem ekstensjonalności i stwierdza, że zbiory o tych samych elementach są identyczne. Wyrażenie (5.17) nazywa się aksjomatem sumy. Stwierdza on, że każdemu zbiorowi x odpowiada taki zbiór y, zwany sumą zbioru x, że do zbioru y należą dokładnie te przedmioty, które należą do co najmniej jednego zbioru będącego elementem zbioru x. Wyrażenie (5.18) nazywa się aksjomatem zbioru potęgowego i stwierdza, że każdemu zbiorowi x odpowiada zbiór y, do którego należą wszystkie podzbiory zbioru x i tylko one. Zbiór y nazywa się potęgą zbioru x lub zbiorem potęgowym zbioru x i jest określany jako $\wp(x)$. Wyrażenie (5.19) nazywa się aksjomatem pary i stwierdza, że dla dowolnych dwóch przedmiotów istnieje zbiór, do którego należą te dwa przedmioty i tylko one. Wyrażenie (5.20) nazywa się aksjomatem nieskończoności i stwierdza, że istnieje co najmniej jeden zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów. Wprost aksjomat ten stwierdza istnienie takiego niepustego zbioru x, że dla każdego właściwego podzbioru y zbioru x można wskazać taki właściwy podzbiór z zbioru x, że zbiór y jest podzbiorem właściwym tego zbioru z. W konsekwencji dla każdego podzbioru właściwego y zbioru x można podać podzbiór właściwy tegoż zbioru x o liczbie elementów większej niż liczba elementów zbioru y. Dla przykładu udowodnimy twierdzenie, według którego istnieje dokładnie jeden (jeden i tylko jeden) zbiór pusty, to znaczy, zbiór, który nie ma ani jednego elementu:

$$\nexists x\colon \neg\exists y\colon y \in x. \tag{5.21}$$

Dowód.

1. $\forall y\colon \exists x\colon \forall z\colon (z \in x \equiv z \in y \wedge z \neq z)$ aksjomat (5.15)
2. $\exists x\colon \neg\exists z\colon z \in x$ wynika z wiersza 1
3. $\forall x, y\colon (\forall z\colon (z \in x \equiv z \in y) \to x = y)$ aksjomat (5.16)
4. $\forall x, y\colon (\neg\exists z\colon z \in x \wedge \neg\exists z\colon z \in y \to \forall z\colon (z \in x \equiv z \in y))$ tautologia
5. $\forall x, y\colon (\neg\exists z\colon z \in x \wedge \neg\exists z\colon z \in y \to x = y)$ wynika z wierszy: 3, 4
6. $\exists x\colon \neg\exists z\colon z \in x \wedge \forall x, y\colon (\neg\exists z\colon z \in x \wedge \neg\exists z\colon z \in y \to x = y)$ 2, 5, DK
7. $\nexists x\colon \neg\exists y\colon y \in x$ wynika z wiersza 6 i df kw jedn

Niekiedy teoria mnogości bywa wzmacniana bardziej skomplikowanymi aksjomatami wyboru, podstawiania i ufundowania. Rozważanie ich nie jest nam jednak potrzebne.

Rozszerzenie pojęcia dowodu. Teoretycznie pojęcie dowodu, określone w definicji 26 jest wystarczające. To znaczy, każde twierdzenie teorii może być dowiedzione za pomocą procedur wyznaczonych przez tę definicję. W praktyce bardzo przydatne są pewne rozszerzenia pojęcia dowodu. Rozszerzanie pojęcia dowodu polega na dopuszczaniu dodatkowych procedur, które skracają lub upraszczają procedurę, ale nie zmieniają zawartości teorii. Znaczy to, że wszystkie wyrażenia dowodliwe w oparciu o rozszerzone procedury, są też dowodliwe w oparciu o procedurę już poznaną. Zapoznamy się z najważniejszymi rozszerzeniami procedury dowodowej. Za dowód *w sensie ścisłym* uznajemy zawsze dowód w sensie definicji 26. Po rozszerzeniu możemy mówić o dowodzie *w sensie szerokim.* Wszystkie rozszerzenia pojęcia dowodu opierają się na analizie własności konsekwencji logicznej. Istotne jest wykazanie tego, że dowód w sensie ścisłym istnieje, ilekroć istnieje jakiś dowód w sensie szerszym.

Rozszerzenia pojęcia dowodu opierają się w pierwszym rzędzie na ważnym *Twierdzeniu o Dedukcji*, odkrytym niezależnie przez Alfreda Tarskiego i Jacquesa Herbranda. Zgodnie z tym twierdzeniem, dla dowolnego zbioru X wyrażeń i dla dowolnych wyrażeń $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, jest tak, że

$$X \vdash \ulcorner \mathcal{A} \to \mathcal{B} \urcorner \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad X, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}. \tag{5.22}$$

Znaczy to, że implikacja jest wyprowadzalna z pewnego zbioru wyrażeń wtedy i tylko wtedy, gdy następnik tej implikacji jest wyprowadzalny z tego samego zbioru wzbogaconego o poprzednik danej implikacji. Twierdzenie o dedukcji zachodzi w odniesieniu do bardzo wielu — ale nie do wszystkich — różnych rachunków logicznych i opartych na nich teoriach. Dowiedziemy tutaj, że zachodzi w odniesieniu do teorii pierwszego rzędu, odwołamy się więc do definicji (26) dowodu w sensie ścisłym. Zauważmy jednak od razu, że w dowodzie oprzemy się wyłącznie na klasycznym rachunku zdań. Znaczy to, że rozważane twierdzenie zachodzi tym bardziej dla teorii opartych na tym rachunku.

Dowiedziemy twierdzenia (5.22) rekurencyjnie.

Własności teorii. Jak powiedzieliśmy, jedna teoria może mieć różne aksjomatyki. Na przykład, zamiast zasady indukcji matematycznej można włączyć do aksjomatyki zasadę minimum. Uzyska się w ten sposób dokładnie ten sam zbiór wyrażeń dowodliwych, w szczególności zasada indukcji matematycznej będzie możliwa do udowodnienia. Aksjomatyka zawierająca zasadę indukcji matematycznej i aksjomatyka zawierająca zasadę minimum są więc przykładami zbiorów równoważnych na gruncie logiki standardowej.

Definicja 27 (sprzeczność teorii) *Teoria jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie wyrażenie $\mathcal{A}$, że zarówno wyrażenie $\mathcal{A}$, jak i jego negacja $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$, są dowodliwe w teorii.*

O teorii, która nie jest sprzeczna, mówi się, że jest *niesprzeczna*. Dowód sprzeczności teorii nazywa się *antynomią*, a teorię sprzeczną nazywa się niekiedy antynomialną. Zwykle niesprzeczność należy do najbardziej pożądanych własności teorii. Wiąże się to między innymi z następującym ważnym twierdzeniem.

Twierdzenie 28 *Teoria elementarna jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyrażenia tej teorii są jej twierdzeniami.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że wszystkie wyrażenia pewnej teorii elementarnej T są jej twierdzeniami. Ponieważ teoria jest elementarna, zawiera symbole klasycznego rachunku zdań, w tym symbol negacji. Zatem dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ teorii T negacja $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ tego wyrażenia również jest wyrażeniem tej teorii. Z założenia obydwa te wyrażenia są twierdzeniami, a więc teoria jest sprzeczna. Załóżmy z kolei, że teoria elementarna T jest sprzeczna i że pewne wyrażenia: $\mathcal{A}, \ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ są twierdzeniami tej teorii. Ponieważ teoria T jest elementarna, dla całkiem dowolnego wyrażenia $\mathcal{B}$ tej teorii, tautologia

$\ulcorner \mathcal{A} \to (\neg \mathcal{A} \to \mathcal{B})\urcorner$ jest twierdzeniem teorii T. Z trzech wymienionych twierdzeń, stosując dwukrotnie regułę Modus Ponens, wyprowadzamy dowolne wyrażenie $\mathcal{B}$. To kończy dowód.

Zatem na gruncie sprzecznej teorii można udowodnić całkiem dowolne wyrażenie. To właśnie stanowi powód pożądania niesprzeczności. Zagadnienie dowodzenia sprzeczności i niesprzeczności teorii jest tak doniosłe, że wkrótce zajmiemy się nim oddzielnie.

Od teorii naukowej oczekujemy — podobnie, jak od składającego przed sądem zeznanie świadka — że powie tylko prawdę i całą prawdę. Teorię, która mówi tylko prawdę, nazywamy bezbłędną, a teorię, która na dany temat mówi całą prawdę, nazywamy pełną. Teorię, która na dany temat mówi całą prawdę i tylko prawdę, nazwiemy adekwatną.

Definicja 29 (bezbłędność teorii) *Teoria T jest bezbłędna wtedy i tylko wtedy, gdy każde wyrażenie, które jest dowodliwe w tej teorii T, jest też prawdziwe.*

Zauważmy od razu, że każda bezbłędna teoria jest niesprzeczna. Albowiem, mocą samej definicji negacji żadne wyrażenie nie może być prawdziwe wespół ze swoją negacją. Odwrotnie nie musi być, to znaczy istnieją niesprzeczne teorie, które nie są bezbłędne. Można sobie — na przykład — łatwo wyobrazić wewnętrznie niesprzeczną bajkę.

Definicja 30 (pełność teorii) *Teoria T jest pełna wtedy i tylko wtedy, gdy każde prawdziwe wyrażenie teorii T jest w tej teorii dowodliwe.*

Zauważmy, że każda sprzeczna teoria jest zarazem pełna. Jeśli bowiem dowodliwe są wszystkie wyrażenia, to tym bardziej dowodliwe są wszystkie wyrażenia prawdziwe. Przyznajmy przy tym od razu, że pełność będąca pochodną sprzeczności raczej nie zadowala twórcy teorii elementarnej. Jak wspomnieliśmy, o teorii, która jest zarazem bezbłędna i pełna, mówimy, że jest *adekwatna*.

Poprawność definicji. Wprowadzaniu do teorii terminów wtórnych służą specjalne aksjomaty zwane definicjami. Niech $n \geqslant 0$ będzie liczbą naturalną, zaś α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ niech będą wszystkimi zmiennymi indywidualnymi wolnymi w wyrażeniach: $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Niech też termin wtórny δ będzie częścią wyrażenia $\mathcal{A}$. O następującej definicji terminu δ:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \colon (\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}) \tag{5.23}$$

powiemy, że ma postać *kanoniczną*. Termin δ nazywa się terminem *definiowanym*, wyrażenie $\mathcal{A}$ nazywa się *definiendum*, wyrażenie $\mathcal{B}$ określamy jako *definiens*, a znak równoważności, łączący definiendum z definiensem, nazywa się *łącznikiem* definicyjnym. Jeżeli w definiendum występują poza terminem definiowanym jeszcze inne znaki, to składają się one na *kontekst* definicyjny. Początkowe kwantyfikatory ogólne, których zasięgiem jest cała równoważność $\ulcorner \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \urcorner$ nazywają się kwantyfikatorami *domykającymi* definicję. Są one bardzo często opuszczane. Wobec obowiązywania reguły generalizacji nie jest to istotne. Przykładami równoważnościowych definicji normalnych mogą być wyrażenia:

$$\forall x, y\colon (x < y \equiv x \leqslant y \wedge x \neq y),$$

$$(x \text{ jest matką } y) \equiv ((x \text{ jest rodzicem } y) \wedge (x \text{ jest kobietą})),$$

z których pierwsze podaje charakterystykę predykatu „<”, a drugie predykatu „jest matką”. W drugim wypadku skorzystaliśmy ze wspominanej już konwencji opuszczenia kwantyfikatorów ogólnych domykających całą definicję. Tych kwantyfikatorów należy się jednak zawsze domyślać. W dalszych rozważaniach będziemy zwykle zakłądać, że mamy do czynienia z definicją o postaci kanonicznej, chyba że wyraźnie zaznaczymy coś innego.

Zauważmy, że przed przyjęciem definicji termin definiowany nie jest terminem teorii T, zatem definiens nie jest jeszcze wyrażeniem tej teorii. Staje się nim dopiero na mocy definicji. Definicje rozszerzają zatem bazę terminologiczną teorii o nowe symbole, których nie ma w alfabecie, i rozszerzają zbiór wyrażeń o wyrażenia zawierające terminy wtórne.

Z logicznego punktu widzenia stawiamy definicjom dwa wymogi: *niesprzeczności* i *przekładalności*. Definicja $\mathcal{D}$ spełnia wymóg niesprzeczności wtedy i tylko wtedy, gdy po dołączeniu tej definicji $\mathcal{D}$ do dowolnej niesprzecznej teorii T powstaje również teoria niesprzeczna. Krótko mówiąc, definicja spełnia wymóg niesprzeczności wtedy i tylko wtedy, gdy nie wywołuje sprzeczności w niesprzecznej teorii. Natomiast definicja $\mathcal{D}$ terminu δ spełnia wymóg przekładalności wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$, które zawiera co najwyżej terminy pierwotne, symbole przejęte z logiki i termin definiowany δ, podaje algorytm znajdowania wyrażenia $\mathcal{A}'$ które jest równoważne z wyrażeniem $\mathcal{A}$ na gruncie teorii T, i które zawiera co najwyżej terminy pierwotne i symbole przejęte z logiki. Krótko mówiąc, definicja spełnia warunek przekładalności wtedy i tylko wtedy, gdy pozwala na wyeliminowanie definiowanego terminu w dowolnym kontekście. Dla wielu typów definicji sformułowano algorytmy czysto mechanicznego sprawdzania, czy definicja czyni zadość wymogom niesprzeczności i przekładalności. Warunki, które składają się na takie algorytmy, nazywamy *formalnymi* warunkami poprawności definicji.

Rozważmy taką definicję (5.23) predykatu δ, że definiendum składa się co najwyżej z terminu definiowanego, zmiennych indywidualnych: $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ i znaków interpunkcyjnych:

$$\delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv \mathcal{B}. \tag{5.24}$$

Dla definicji o takiej budowie obowiązują trzy następujące formalne warunki poprawności: (a) warunek *ufundowania*, (b) warunek *ogólności* oraz (c) warunek *jednorodności*. Definicja spełnia warunek ufundowania wtedy i tylko wtedy, gdy w definiensie występują co najwyżej symbole należące do alfabetu teorii i terminy uprzednio prawidłowo zdefiniowane. Definicja spełnia warunek ogólności wtedy i tylko wtedy, gdy w definiendum żadna zmienna wolna się nie powtarza. Definicja spełnia warunek jednorodności wtedy i tylko wtedy, gdy — pominąwszy kwantyfikatory domykające — dokładnie te same zmienne występują jako wolne w definiendum i w definiensie. Jeżeli spełnione są wszystkie warunki (a)–(c), to definicja o postaci (5.24) na pewno czyni zadość wymogowi niesprzeczności i wymogowi przekładalności. Jeżeli nie jest spełniony warunek (a) lub warunek (b), to definicja może nie czynić zadość wymogowi przekładalności. Jeżeli zaś nie jest spełniony warunek (c) to definicja może nie czynić zadość wymogowi niesprzeczności.

Warunek ufundowania jest narzędziem kontroli rozszerzania bazy terminologicznej teorii. Blokuje on wprowadzanie terminów, których charakterystyka nie jest ostatecznie oparta na alfabecie. Jeżeli warunek ufundowania nie jest spełniony, to zarzucamy błąd *ignotum per ignotum*. Błąd ten popełnilibyśmy, na przykład, gdybyśmy wprowadzili do arytmetyki `PA` definicję (5.11) przed wprowadzeniem definicji (5.10). Definiens definicji (5.10) zawiera wyłącznie terminy pierwotne i symbole przejęte z logiki, spełaniając tym samym warunek ufundowania. Natomiast w definiensie definicji (5.11) występuje ponadto symbol „$\leqslant$”, który nie należy do alfabetu. Dopóki więc nie zostanie on prawidłowo zdefiniowany, stając się w ten sposób terminem wtórnym teorii `PA`, nie wolno używać go do definiowania innych terminów (ani zresztą w żadnym innym celu poza definiendum jego własnej definicji).

Szczególną wersją błędu *ignotum per ignotum* jest błąd *idem per idem*. Błąd ten bywa często nazywany *błędnym kołem w definicji — circulus* (*vitiosus*) *in definiendo*. Błąd ten należy starannie odróżniać od znanego nam już błędnego koła we wnioskowaniu. Z błędem *idem per idem* mamy do czynienia, jeśli do zdefiniowania terminu wtórnego δ używamy tego samego terminu δ. Jak powiedzieliśmy, termin wtórny zostaje wprowadzony do teorii dopiero na mocy definicji. Mamy tu więc do czynienia z błędem *ignotum per ignotum*. Jest to jednak osobliwa postać tego błędu. Z błędnym kołem *bezpośrednim* mamy do czynienia, gdy definiowany termin występuje wręcz w definiensie swej własnej definicji, na przykład „Polakiem jest ten, kto uważa się za Polaka", „szczęście polega na poczuciu szczęścia". Ciekawego przykładu błędnego koła bezpośredniego dostarcza pewna naukowa książka z dziedziny biologii. Podano tam następującą definicję gatunku: „gatunek jest to wszelkie zbiorowisko form, które ma pochodzenie wspólne i różne od innych gatunków". Z błędnym kołem *pośrednim* mamy do czynienia, gdy w definiensie definicji terminu wtórnego δ_1 występuje termin wtórny δ_2, w definiensie definicji terminu δ_2 występuje termin wtórny δ_3 i tak dalej, aż do takiego terminu wtórnego δ_n, że w definiensie jego definicji występuje definiowany obecnie termin δ_1. Przykładem błędnego koła pośredniego są definicje występujące w ustawie *Prawo o ruchu drogowym*:

- droga jest to wydzielony pas terenu składający się z jezdni, pobocza, chodnika, ...,
- jezdnia jest to część drogi przeznaczona do ruchu pojazdów.

Termin „droga" został tu zdefiniowany za pomocą terminu „jezdnia" i odwrotnie, termin „jezdnia" został zdefiniowany za pomocą terminu „droga". Innego przykładu dostarczają definicje, które mozna znaleźć w jednej z książek naukowych z zakresu teorii sztuki:

- dzieło sztuki jest to przedmiot zdolny do wzbudzenia emocji estetycznej,
- emocja estetyczna jest to przeżywanie znaczącej formy w dziele sztuki.

Termin „dzieło sztuki" został tu zdefiniowany za pomocą terminu „emocja estetyczna" i odwrotnie, termin „emocja estetyczna" został zdefiniowany zdefiniowany za pomocą terminu „dzieło sztuki". Ten sam błąd bywa czasami popełniany w szkolnych lub popularnych wykładach matematyki. Można tam znaleźć definicje:

$$x \leqslant y \equiv x < y \vee x = y,$$
$$x < y \equiv x \leqslant y \wedge x \neq y,$$

które definiują predykat „$\leqslant$" za pomocą predykatu „$<$" i odwrotnie, predykat „$<$" za pomocą predykatu „$\leqslant$".

Omawiając warunek ogólności, weźmy pod uwagę przykład definicji (5.10). W definiendum występują tam dwie zmienne: „x" i „y", i każda z nich występuje w definiendum tylko raz, tylko na jednym miejscu. Warunek jednorodności jest więc spełniony. Chwila namysłu wystarczy, żeby uświadomić sobie skutki zaniedbania tego warunku. Gdyby, powiedzmy definiendum definicji (5.10) stanowiło wyrażenie „$x \leqslant x$", to nie dałoby się zastosować tej definicji m.in. do wyrażenia „$2 < 3$", a więc nie spełniono by wymogu przekładalności.

Pozostając przy tym samym przykładzie definicji (5.10), pochylmy się nad warunkiem jednorodności. Definicja (5.10) spełnia ten warunek. Jeśli bowiem pominiemy kwantyfikatory domykające definicję, w definiendum i w definiensie wolne pozostaną dokładnie te same zmienne: „x” i „y”. Co prawda, w definiensie występuje jeszcze zmienna „z”, której nie ma w definiendum, ale jest ona związana przez kwantyfikator należący do definiensu. Zastanówmy się, co mogłoby się stać, gdyby warunku jednorodności zaniedbano, gdyby definicja (5.10) przybrała, powiedzmy, postać:

$$\forall x, y, z \colon (x \leqslant y \equiv x + z = y). \tag{5.10'}$$

Arytmetyka `PA` stałaby się mianowicie natychmiast teorią sprzeczną. Antynomia mogłaby wyglądać w następujący sposób:

1. $\forall x, y, z \colon (x \leqslant y \equiv x + z = y)$	definicja (5.10’)
2. $2 \leqslant 3 \equiv 2 + 1 = 3$	wynika z wiersza 1
3. $2 + 1 = 3$	twierdzenie arytmetyki `PA`
4. $2 \leqslant 3$	wynika z wierszy: 2, 3
5. $2 \leqslant 3 \equiv 2 + 0 = 3$	wynika z wiersza 1
6. $2 + 0 \neq 3$	twierdzenie arytmetyki `PA`
7. $\neg(2 \leqslant 3)$	wynika z wierszy: 5, 6

Sprzeczność, jak widać, pojawia się w wierszach: 4 i 7. Powstanie tej antynomii jest skotkiem wyłącznie zaniedbania warunku jednorodności w definicji (5.10’).

Rozważając formalne warunki poprawności definicji o postaci (5.24), przekonaliśmy się przy okazji, że definicja (5.10) spełnia wszystkie te warunki. Tym samym zyskujemy pewność, że czyni ona zadość wymogom niesprzeczności i przekładalności. Z formalnego punktu widzenia definicja ta może być prawidłowo dołączona do teorii `PA`.

Drugą grupą definicji, dla których opracowano metodę sprawdzania formalnej poprawności, są definicje termów — w szczególności nazw jednostkowych lub symboli funkcyjnych — o postaci

$$\beta = \delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \equiv \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta), \tag{5.25}$$

przy czym $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ są wszystkimi zmiennymi wolnymi w definiendum (pomijamy tu znowu domyślne kwantyfikatory domykające). W porównaniu z definicją typu (5.24) w definiensie, oprócz terminu definiowanego, zmiennych i znaków interpunkcyjnych, występuje jeszcze znak równości. Przykładem definicji omawianego typu może być definicja funkcji logarytm:

$$y = \log_x z \equiv x^y = z.$$

Jeśli liczba zmiennych wolnych n równa się zeru, termin definiowany δ jest nazwą jednostkową, w przeciwnym razie jest to symbol funkcyjny. W odniesieniu do formalnej poprawności definicji typu (5.25) obowiązują warunki (a)–(c), sformułowane dla definicji typu (5.24), a więc warunek ufundowania, warunek ogólności i warunek jednorodności. Ponadto obowiązuje (d) warunek *istnienia i jedyności*. Aby definicja termu δ spełniała ten warunek na gruncie teorii T, należy dowieść w tejże teorii twierdzenia:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \colon \nexists \beta \colon \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta), \tag{5.26}$$

zgodnie z którym w uniwersum dyskursu zawsze istnieje dokładnie jeden desygnat nazwy powstającej z termu δ. Na przykład, rozważając teorię mnogości `Zer`, udowodniliśmy twierdzenie (5.21) o istnieniu dokładnie jednego zbioru pustego. Upoważnia to — obok spełnienia pozostałych warunków formalnej poprawności — do wprowadzenia w teorii `Zer` terminu wtórnego „$\varnothing$", który jest nazwą jednostkową zbioru pustego:

$$x = \varnothing \equiv \neg \exists y \colon y \in x. \tag{5.27}$$

Niedopełnienie warunku istnienia i jedyności może wywołać w teorii sprzeczność.

Antynomie. Jak powiedzieliśmy, antynomia jest to dowód sprzeczności teorii. Należy dokładnie odróżniać pojęcie antynomii od pojęcia *paradoksu*. Jako paradoksalne określamy to, co jawi się jako niewiarygodne. Jeśli więc jesteśmy przekonani o bezbłędności jakiejś teorii, to odkrycie w tej teorii antynomii, bez wątpienia, jest paradoksem. Jeśli jednak teoria jawiłaby się nam jako wysoce podejrzana, to pojawienie się antynomii nie byłoby niczym paradoksalnym, przeciwnie, potwierdzałoby nasze podejrzenia. Z drugiej strony nie każdy paradoks jest antynomią. Wiele spośród przełomowych odkryć naukowych stanowiło paradoksy, ponieważ godziło w zastaną wiedzę lub potoczne wyobrażenia. Przykłady można by mnożyć. Wymieńmy tylko odkrycie liczb niewymiernych przez pitagorejczyków, helicentryczny system Mikołaja Kopernika, Powstanie geometrii nieeuklidesowych, odkrycie promieniotwórczości, odkrycie bezwzględności wartości prędkości światła, odkrycie efektów kwantowych. We wszystkich wymienionych przypadkach roiło się — a nawet roi nadal — od paradoksów. Jednakże w żadnym z nich nie wykryto niewątpliwych antynomii. Antynomialność jest więc obiektywną własnością teorii, podczas gdy paradoksalność jest stosunkiem teorii do zastanej wiedzy.

Antynomie pojawiają się od czasu do czasu w różnych dziedzinach wiedzy. Jak powiedzieliśmy, ze względu na twierdzenie 28 są one niemal zawsze uważane za trudność najwyższej wagi. Podważają bowiem wszelką wartość poznawczą teorii, w której tkwią. Trudno się więc dziwić, że świat naukowy zaniemówił, kiedy na przełomie XIX i XX w. odkryto dziesiątki antynomii w podstawach matematyki. Matematyka przecież cieszyła się opinią królowej nauk i wzorca wszelkiej rozumności i precyzji. Oniemiali uczeni ogłosili na początku XX w. kryzys w podstawach matematyki. Zapoznamy się z jedną antynomią matematyczną, *antynomią Russella*. Jest to prawdopodobnie najprostsza wykryta w matematyce antynomia. Właśnie jej prostota okazała się szczególnie porażająca. Pod wpływem tej antynomii wielu badaczy doszło do przekonania, że nie można zgoła ufać rozumowi ludzkiemu, skoro sprzeczność pojawia się w podstawowej dziedzinie matematyki, mianowicie w teorii zbiorów, i to pojawia się z niesamowitą prostotą.

Frege założył, że dla dowolnego warunku można wskazać zbiór przedmiotów spełniających ten warunek. Na przykład warunkom:

x jest słoniem,

x jest liczbą pierwszą

odpowiadają odpowiednio: zbiór wszystkich słoni i zbiór wszystkich liczb pierwszych. Jeśli sformułowany warunek jest wewnętrznie sprzeczny, jak przykładowo warunek:

x jest kwadratowym kołem,

to zbiór przedmiotów spełniających ten warunek jest pusty. Nie mniej jednak jest to jakiś zbiór. Założenie to można wyrazić, przyjmując, że dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ wyrażenie:

$$\exists x\colon \forall y\colon (y \in x \equiv \mathcal{A}(y)) \tag{5.28}$$

jest aksjomatem teorii mnogości. To założenie zostało nazwane aksjomatem *komprehenzji* czyli pojmowalności. To jednak wystarczy do powstania antynomii. Nie upłynęło wiele czasu, kiedy Bertrand Russell podał jako wyrażenie $\mathcal{A}$ następujący warunek: y nie jest swoim własnym elementem (tj. $y \notin y$). Chwila zastanowienia wystarczy, by się przekonać, że zbiór zbiorów niebędących swymi elementami jest i zarazem nie jest swoim własnym elementem. Jeśli bowiem jest on swoim elementem, to z definicji nie jest swoim własnym elementem i odwrotnie. Zgodnie z więc z teorią Fregego istnieje zbiór, który jest swoim elementem i nie jest swoim elementem. To jednak jest antylogia, a więc jej zaprzeczenie jest tautologią i może być dowolnie dołączone do dowodu. W ten sposób można precyzyjnie wykazać sprzeczność teorii Fregego:

1. $\exists x\colon \forall y\colon (y \in x \equiv y \notin y)$ — aksjomat komprehenzji
2. $\forall x\colon (\forall y\colon (y \in x \equiv y \notin y) \to (x \in x \land x \notin x))$ — tautologia
3. $\exists x\colon (x \in x \land x \notin x)$ — wynika z wierszy: 2, 1,
4. $\neg\exists x\colon (x \in x \land x \notin x)$ — tautologia

Jak wspomnieliśmy, w chwili, gdy Russell pisał do Fregego, wiedziano już, że w podstawach matematyki kryją się pewne trudności. Nikt jednak nie oczekiwał, że sprzeczność może pojawić się w matematyce tak prosto i ewidentnie. Z szoku, jaki został wywołany odkryciem antynomii Russella, matematyka pod pewnymi względami nie zdołała się jeszcze otrząsnąć.

Dowód niesprzeczności.

Definicja 31 *Teoria elementarna T_1 ma model (interpretację) w teorii elementarnej T_2 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje teoria elementarna T_3, która powstaje przez dołączenie do aksjomatyki teorii T_2 dowolnych formalnie poprawnych definicji wszystkich terminów pierwotnych teorii T_1 i w której dowodliwe są wszystkie aksjomaty teorii T_1. O teorii T_3 mówimy, że interpretuje ona teorię T_1 w teorii T_2 lub że ustanawia model teorii T_1 w teorii T_2.*

Rozważmy dla przykładu prostą teorię `Ord1` pewnego porządku, o jednym terminie pierwotnym i aksjomatach:

$$\neg\exists x\colon \mathtt{P}(x,x), \tag{5.29}$$
$$\forall x,y,z\colon (\mathtt{P}(x,y) \land \mathtt{P}(y,z) \to \mathtt{P}(x,z)), \tag{5.30}$$
$$\forall x,y\colon (x \neq y \to \mathtt{P}(x,y) \lor \mathtt{P}(y,x)), \tag{5.31}$$
$$\forall x\colon (\exists y\colon \mathtt{P}(x,y) \land \exists y\colon \mathtt{P}(y,x)), \tag{5.32}$$
$$\forall x,y\colon (\mathtt{P}(x,y) \to \exists z\colon (\mathtt{P}(x,z) \land \mathtt{P}(z,y))). \tag{5.33}$$

Teoria `Ord1` ma Model (interpretację) w arytmetyce liczb wymiernych. Aby się o tym przkonać rozważmy teorię liczb wymiernych — pomijamy tutaj jej dokładną aksjomatykę — i dodajmy do wszystkich znanych nam twierdzeń dotyczących liczb wymiernych definicję:

$$\forall x,y\colon (\mathtt{P}(x,y) \equiv x < y). \tag{5.34}$$

Jest przy tym obojętne, czy taka definicja chwyta ideę właściwą teorii `Ord1`. Ważne jest natomiast to, że wszystkie aksjomaty (5.29)–(5.33) okazują się twierdzeniami teorii liczb wymiernych wzbogaconej o definicję (5.34).

Twierdzenie 32 *Jeżeli teoria T_1 ma model w teorii T_2, to teoria T_1 jest niesprzeczna, jeśli tylko niesprzeczna jest teoria T_2.*

Dowód twierdzenia 32 nie powinien nastręczać trudności. Załóżmy, że teoria T_1 jest niesprzeczna i ma model w teorii T_2 ustanowiony przez teorię T_3. Na mocy definicji 31 teoria T_3 jest sprzeczna. Musi ona być sprzeczna dlatego, że dowodliwe są w niej wszystkie aksjomaty teorii T_1. Ponieważ zaś we wszystkich teoriach elementarnych posługujemy się tym samym zestawem reguł logicznych i tautologii, wszystkie twierdzenia teorii T_1 są dowodliwe w teorii T_3. Zatem, skoro teoria T_1 jest sprzeczna, to teoria T_2 również jest sprzeczna. Z kolei teoria T_3 powstaje z teorii T_2 przez dodanie do aksjomatyki pewnej liczby formalnie poprawnych definicji. Definicje takie spełniają warunek niesprzeczności, czyli, dodane do teorii niesprzecznej, dają teorię niesprzeczną. Jeśli więc teoria T_3 jest sprzeczna, to teoria T_2 również jest sprzeczna. Zatem, jeśli teoria T_1 jest sprzeczna, to teoria T_2 musi być również sprzeczna. Jeśli więc wiemy skądinąd, że teoria T_2 jest niesprzeczna, to tym samym wiemy, że niesprzeczna jest teoria T_1.

Zatem, wobec twierdzenia 32, wykazaliśmy, że, jeśli arytmetyka liczb wymiernych jest niesprzeczna, to teoria `Ord1` również jest niesprzeczna.

Zapoznamy się jeszcze z bardzo prostą teorią elementarną `Ord`, która jest fragmentem geometrii absolutnej, to znaczy wspólnej części geometrii Euklidesa i geometrii Bolyai-Łobaczewskiego. Uniwersum dyskursu stanowi zbiór wszystkich punktów jednej dowolnej prostej. Teoria dotyczy uporządkowania punktów na prostej. Wprowadzamy jeden pierwotny termin, trójargumentowy predykat, który pozwala na budowanie wyrażeń typu:

$$\mathtt{M}(x, y, z), \tag{5.35}$$

co należy odczytywać: punkt y leży między punktem x a punktem z. Aksjomatami teorii Ord są następujące wyrażenia:

$$\mathtt{M}(x,y,z) \to x \neq y \wedge x \neq z, \tag{5.36}$$

$$\mathtt{M}(x,y,z) \to \mathtt{M}(z,y,x), \tag{5.37}$$

$$x \neq z \to \exists y\colon \mathtt{M}(x,y,z), \tag{5.38}$$

$$x \neq y \to \exists z\colon \mathtt{M}(x,y,z), \tag{5.39}$$

$$x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \to \mathtt{M}(x,y,x) \vee \mathtt{M}(y,z,x) \vee \mathtt{M}(z,x,y), \tag{5.40}$$

$$\mathtt{M}(x,y,z) \to \neg\mathtt{M}(y,x,z) \wedge \neg\mathtt{M}(x,z,y), \tag{5.41}$$

$$\mathtt{M}(x,u,y) \wedge \mathtt{M}(x,w,y) \to \mathtt{M}(u,w,y) \vee u = w \vee \mathtt{M}(x,w,u), \tag{5.42}$$

$$\mathtt{M}(x,y,z) \to (\mathtt{M}(x,v,y) \vee \mathtt{M}(y,v,z) \to \mathtt{M}(x,v,z)), \tag{5.43}$$

$$\mathtt{M}(x,y,u) \wedge \mathtt{M}(x,y,w) \to \mathtt{M}(y,u,w) \vee u = w \vee \mathtt{M}(y,w,u). \tag{5.44}$$

$$\tag{5.45}$$

Zauważmy, że ta prosta aksjomatyka jest skończona, mamy więc do czynienia z teorią skończenie aksjomatyzowalną. Dla przykładu skorzystaliśmy też z omówionej wcześniej, rozpowszechnionej konwencji, pomijając wszystkie początkowe kwantyfikatory ogólne. Wszystkie sformułowane aksjomaty są więc skrótami myślowymi wyrażeń powstających przez domknięcie tych aksjomatów za pomocą kwantyfikatora ogólnego. Na przykład wyrażenie (5.36) należy rozumieć jako skrót wyrażenia:

$$\forall x\colon \forall y\colon \forall z\colon (\mathtt{M}(x,y,z) \to x \neq y \wedge x \neq z). \tag{5.46}$$

Widać więc, że zmienne wolne w aksjomatach — i we wszystkich twierdzeniach — teorii dedukcyjnych są wolne tylko pozornie. W rzeczywistości są to zmienne związane domyślnymi kwantyfikatorami ogólnymi obejmującymi swoim zasięgiem całe odnośne wyrażenia. Należy zachować świadomość tej konwencji, na niej opiera się m.in. praktyka podstawiania za zmienne wolne w twierdzeniach.

Niesprzeczności teorii Ord można dowieść przez następującą interpretację w arytmetyce liczb naturalnych:

$$\forall x,y,z\colon (\mathtt{M}(x,y,z) \equiv x < y \wedge y < z). \tag{5.47}$$

Jeśli więc arytmetyka jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest również teoria Ord.

5.2 Twierdzenia limitacyjne

Arytmetyzacja i diagonalizacja. Wśród teorii aksjomatycznych ważną rolę odgrywają teorie *bogate*. Do teorii bogatych zaliczamy arytmetykę liczb naturalnych i wszystkie teorie, w których arytmetyka się zawiera. Zawieranie rozumiemy tak, że dla uznania teorii za bogatą wystarczy możliwość zdefiniowania w niej pojęć arytmetyki lub ich odpowiedników. Poza czystą logiką, prawie wszystkie ciekawe teorie są bogate. W szczególności bogate są wszystkie działy klasycznej matematyki, a więc również teorie empiryczne, których matematyka jest komponentem.

Zapoznamy się z dwiema własnościami teorii bogatych. Same te własności nie muszą robić wrażenia interesujących, ale — jak zobaczymy — prowadzą do odkryć, które mogą przyprawić o zawrót głowy. Jak większość wielkich dokonań naukowych, na te odkrycia składa się wysiłek pokoleń badaczy. Wszakże największą część pracy wykonał Kurt Gödel.

Wyrażenia każdej bogatej teorii mogą być ponumerowane, każdemu z nich można przypisać dokładnie jedną liczbę naturalną. Podobnie można ponumerować ciągi wyrażeń i inne ich układy. Numeracja ma przy tym tę własność, że wielu zbiorom wyrażeń i relacjom między nimi odpowiadają jednoznacznie zbiory i relacje między liczbami naturalnymi. Tego rodzaju przyporządkowanie wyrażeń i liczb nazywa się *arytmetyzacją* języka. Czynność arytmetyzacji jest bardzo żmudna i nie będziemy jej śledzić krok po kroku. Zamiast tego wprowadzimy dwa skróty:

$\mathtt{nr}(\mathcal{A})$ — numer wyrażenia $\mathcal{A}$,

$\mathtt{nr}(x/y)$ — numer wyrażenia, które powstaje z wyrażenia mającego numer x przez podstawienie nazwy liczby y za wszystkie zmienne wolne w tymże wyrażeniu numer x.

Niech, na przykład, wyrażenie „$x + 1 > x$” ma numer n, to znaczy,

$$\mathtt{nr}(x + 1 > x) = n.$$

Wówczas $\mathtt{nr}(n/5)$ jest numerem wyrażenia powstającego z wyrażenia numer n przez podstawienie liczebnika „5” za jedyną zmienną wolną „x”. Zatem

$$\mathtt{nr}(n/5) = \mathtt{nr}(5 + 1 > 5).$$

Obliczanie poszczególnych numerów nie jest dla nas istotne. Ważne jest natomiast to, że przeprowadzenie arytmetyzacji jest z pewnością możliwe.

Drugą ważną cechą bogatych teorii, opartą m.in. na zarytmetyzowaniu języka, jest możliwość *diagonalizacji*. Polega ona na tym, że dla dowolnej własności W, o której można mówić w języku teorii, daje się zbudować zdanie, które o sobie samym stwierdza, że ma tę własność W. Zdanie to brzmi, mniej więcej, tak: „mam własność W”. Dokładniej, dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ z jedną zmienną wolną można w tej samej teorii zbudować zdanie:

„spełniam wyrażenie $\mathcal{A}$". Mówi o tym ważne twierdzenie, zwane lematem przekątniowym lub lematem diagonalizacyjnym.

Twierdzenie 33 (lemat przekątniowy) *Niech T będzie dowolną bogatą teorią. Dla każdego wyrażenia $\mathcal{A}(\alpha)$ teorii T mającego dokładnie jedną zmienną wolną α istnieje takie domknięte wyrażenie $\mathcal{B}$ teorii T, że na gruncie teorii T dowodliwa jest równoważność $\ulcorner\mathcal{A}(\mathtt{nr}(\mathcal{B})) \equiv \mathcal{B}\urcorner$.*

Wyrażenie $\mathcal{B}$, o którym jest mowa w lemacie przekątniowym, nazywa się *punktem stałym* wyrażenia $\mathcal{A}(\alpha)$. Jak widać arytmetyzacja odgrywa tutaj istotną rolę. Punkt stały $\mathcal{B}$ wyrażenia $\mathcal{A}(\alpha)$ stwierdza: mój numer spełnia wyrażenie $\mathcal{A}(\alpha)$.

Spróbujmy zapoznać się z dowodem twierdzenia 33. Niech $\mathcal{A}(\alpha)$ będzie dowolnym wyrażeniem o jednej zmiennej wolnej α. Jeśli podstawimy za tę zmienną term $\mathtt{nr}(\alpha/\alpha)$, to powstanie wyrażenie

$$\mathcal{A}(\mathtt{nr}(\alpha/\alpha)), \tag{5.48}$$

które również ma dokładnie jedną zmienną wolną α. Wyrażenie (5.48) samo musi mieć jakiś numer, powiedzmy numer $\mathtt{d}$ (jak diagonalizacja):

$$\mathtt{d} = \mathtt{nr}(\mathcal{A}(\mathtt{nr}(\alpha/\alpha))), \tag{5.49}$$

a wobec tego

$$\mathtt{nr}(\mathtt{d}/\mathtt{d}) = \mathtt{nr}(\mathcal{A}(\mathtt{nr}(\mathtt{d}/\mathtt{d}))). \tag{5.50}$$

Mowa o diagonalizacji, czyli o tworzeniu przekątnej, bierze się z obrazowego przedstawienia rozważanych tu podstawień. Wyobraźmy sobie tabelę,

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
\mathcal{A}_1(x) & \mathcal{A}_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}) & \mathcal{A}_1(2) & \mathcal{A}_1(3) & \mathcal{A}_1(4) & \dots \\
\mathcal{A}_2(x) & \mathcal{A}_2(1) & \mathcal{A}_{\mathbf{2}}(\mathbf{2}) & \mathcal{A}_2(3) & \mathcal{A}_2(4) & \dots \\
\mathcal{A}_3(x) & \mathcal{A}_3(1) & \mathcal{A}_3(2) & \mathcal{A}_{\mathbf{3}}(\mathbf{3}) & \mathcal{A}_3(4) & \dots \\
\mathcal{A}_4(x) & \mathcal{A}_4(1) & \mathcal{A}_4(2) & \mathcal{A}_4(3) & \mathcal{A}_{\mathbf{4}}(\mathbf{4}) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array} \tag{5.51}$$

która w pierwszej kolumnie zawiera kolejno ponumerowane wszystkie wyrażenia mające dokładnie jedną zmienną wolną, a w pierwszym wierszu nazwy kolejnych liczb naturalnych. Na przecięciu wiersza z kolumną znajduje się domknięte wyrażenie, które jest podstawieniem nazwy właściwej liczby we właściwym wyrażeniu. Jak widać, na przekątnej tabeli występują wyrażenia powstałe przez podstawienie numeru wyrażenia w tymże wyrażeniu (dla lepszego uzmysłowienia pogrubiliśmy numery na przekątnej). Otóż w którymś wierszu, w pierwszej kolumnie musi się pojawić wyrażenie numer $\mathtt{d}$, a po przekątnej, na tej wysokości, wyrażenie o numerze $\mathtt{nr(d/d)}$, którego szukamy.

Jest to kluczowy moment dowodu i należy dokładnie wmyślić się w stwierdzenia (5.49) oraz (5.50). Okazuje się bowiem, że domknięte wyrażenie

$$\mathcal{A}(\mathtt{nr(d/d)}), \tag{5.52}$$

które występuje w stwierdzeniu (5.50), jest właśnie poszukiwanym wyrażeniem $\mathcal{B}$ z lematu przekątniowego. To znaczy, jest ono punktem stałym wyrażenia $\mathcal{A}(\alpha)$. Żeby się o tym przekonać, zauważmy najpierw, że tautologia

$$\mathcal{A}(\mathtt{nr(d/d)}) \equiv \mathcal{A}(\mathtt{nr(d/d)}) \tag{5.53}$$

jest twierdzeniem teorii T, ponieważ jest tautologią. Z wyrażeń (5.50) oraz (5.53) dowodzimy od razu wyrażenia

$$\mathcal{A}(\mathtt{nr}(\mathcal{A}(\mathtt{nr(d/d)}))) \equiv \mathcal{A}(\mathtt{nr(d/d)}) \tag{5.54}$$

jako twierdzenia teorii danej T. To zaś jest właśnie ta równoważność, o której mówi dowodzone twierdzenie 33, w którym punkt stały $\mathcal{B}$ przyjmuje kształt wyrażenia (5.52):

$$\mathcal{A}(\mathtt{nr}(\underbrace{\mathcal{A}(\mathtt{nr(d/d)})}_{\mathcal{B}})) \equiv \underbrace{\mathcal{A}(\mathtt{nr(d/d)})}_{\mathcal{B}} \tag{5.54'}$$

Nie jest przy tym istotne to, że skonstruowaliśmy wyrażenie dość dziwaczne. Liczy się jedynie to, że zgodnie z dowodzonym twierdzeniem, takie wyrażenie da się skonstruować dla dowolnego $\mathcal{A}(\alpha)$.

Pierwsze Twierdzenie Gödla. Diagonalizacja pozwala na udowodnienie wielu ważnych twierdzeń, z których najsłynniejsze jest Pierwsze Twierdzenie Gödla. Ogłoszenie tego twierdzenia w 1931 r. wstrząsnęło całym matematyczno-logicznym światem i coś z tego wstrząsu trwa chyba do dzisiaj.

Twierdzenie 34 (Gödel I) *Jeżeli jakakolwiek teoria T jest zarazem bogata i niesprzeczna, to w języku tej teorii istnieje takie wyrażenie $\mathcal{A}$, że ani samo wyrażenie $\mathcal{A}$ nie jest dowodliwe, ani jego negacja $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$.*

Źródłem wstrząsu, związanego z Pierwszym Twierdzeniem Gödla, są filozoficzne konsekwencje tego twierdzenia. Spośród wyrażeń: $\mathcal{A}$, $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$ co najmniej jedno jest prawdziwe. Zatem w każdej bogatej i niesprzecznej teorii istnieją prawdziwe wyrażenia, których nie da się dowieść. Nie jest możliwe skonstruowanie jakiejkolwiek teorii, któraby była równocześnie niesprzeczna, bogata i pełna. Znaczy to, że nasza wiedza nigdy nie osiągnie doskonałej ścisłości, dowód nigdy nie będzie jedyną formą uzasadniania. Zawsze będziemy musieli polegać częściowo na wnioskowaniach zawodnych, intuicji oraz wierze.

Naszkicujemy dowód Pierwszego Twierdzenia Gödla. Opiera się on przede wszystkim na lemacie przekątniowym oraz na pewnej wersji arytmetyzacji języka. Gödel odkrył, że w każdej bogatej teorii można zdefiniować wyrażenie

$$\mathtt{Dow}(x), \tag{5.55}$$

które należy odczytywać: wyrażenie o numerze x jest dowodliwe, ewentualnie: liczba x jest numerem wyrażenia dowodliwego. Wyrażenie (5.55) ma przy tym tę własność, że

$$\vdash_T \mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathcal{A})) \;\text{ wtedy i tylko wtedy, gdy }\; \vdash_T \mathcal{A}, \tag{5.56}$$

to jest, dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ o numerze $\mathtt{nr}(\mathcal{A})$, wyrażenie $\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathcal{A}))$ jest dowodliwe w teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy w tej teorii dowodliwe jest samo wyrażenie $\mathcal{A}$. Innymi słowy, jeśli można cokolwiek udowodnić, to można też udowodnić, że można to udowodnić, i odwrotnie. Zależność (5.56) opiera się na tym, że dowody i wszelkie skończone ciągi wyrażeń można unikalnie ponumerować tak, jak same wyrażenia. Sprawdzanie, czy dany ciąg jest dowodem, staje się wówczas badaniem, czy dana liczba naturalna należy do określonego zbioru, czy nie. Tymczasem teoria liczb naturalnych z definicji daje się wyrazić w każdej bogatej teorii. Szczegółowa analiza tej kwestii jest nadre żmudna, ale główna idea jest właśnie taka.

Na drugim etapie dowodu korzystamy z twierdzenia 33. Zauważmy, że wyrażenie (5.55) ma dokładnie jedną zmienną wolną. Podobnie negacja

$$\neg\mathtt{Dow}(x) \tag{5.57}$$

tego wyrażenia zawiera dokładnie jedną zmienną wolną. Wobec tego, na mocy twierdzenia 33, istnieje domknięte wyrażenie, które jest punktem stałym wyrażenia (5.57). Wyrażenie, które jest punktem stałym wyrażenia (5.57), na cześć Gödla, nazywa się zdaniem *gödlowskim* lub zdaniem $\mathtt{g}$. Zatem, na mocy twierdzenia 33, istnieje takie domknięte wyrażenie $\mathtt{g}$, że równoważność

$$\neg\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathtt{g})) \equiv \mathtt{g} \tag{5.58}$$

jest dowodliwa w danej teorii T. Jak widać, zdanie G głosi o sobie samym: nie jestem dowodliwe w tej teorii.

Jak pamiętamy, w Pierwszym Twierdzeniu Gödla, to znaczy w dowodzonym obecnie twierdzeniu 34, zakładamy, że teoria T jest bogata i niesprzeczna. Dzięki temu, że jest to teoria bogata, zachodzi zależność (5.56), a równoważność (5.58) jest dowodliwa. Jeśli teoria T jest ponadto niesprzeczna, to ani zdanie g, ani jego negacja $\ulcorner\neg\mathtt{g}\urcorner$ nie są dowodliwe w tej teorii — a tyle właśnie głosi Pierwsze Twierdzenie Gödla.

Załóżmy bowiem, że zdanie g jest dowodliwe w teorii T. Ponieważ zależność (5.56) zachodzi dla dowolnego wyrażenia, więc również dla zdania g. Wobec tego wyrażenie

$$\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathtt{g})) \tag{5.59}$$

jest dowodliwe w teorii T. Z drugiej strony, skoro dowodliwe jest zdanie g i równoważność (5.58), to tym samym wyrażenie

$$\neg\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathtt{g})) \tag{5.60}$$

również jest dowodliwe. W takim razie teoria T jest sprzeczna, ale to jest niezgodne z założeniem. Wobec tego zdanie g nie może być dowodliwe na gruncie teorii T.

Załóżmy teraz, że zdanie $\ulcorner\neg\mathtt{g}\urcorner$ jest dowodliwe w teorii T. Skoro równoważność (5.58) jest dowodliwa, to na mocy klasycznego rachunku zdań dowodliwa jest też równoważność

$$\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathtt{g})) \equiv \neg\mathtt{g}, \tag{5.61}$$

a stąd wynika, że dowodliwe jest wyrażenie

$$\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathtt{g})). \tag{5.62}$$

Ze względu na zależność (5.56), która zachodzi dla dowolnego wyrażenia, dowodliwe jest tym samym zdanie g. Gdyby jednak dowodliwe było i zdanie g, i jego negacja $\ulcorner\neg\mathtt{g}\urcorner$, to teoria T byłaby sprzeczna, co kłóci się z założenie, Wobec tego zdanie $\ulcorner\neg\mathtt{g}\urcorner$ nie może być dowodliwe.

Przekonaliśmy się, że ani zdanie gödlowskie, ani jego negacja nie mogą mieć dowodu w bogatej i niesprzecznej teorii. Taka właśnie jest treść Pierwszego Twierdzenie Gödla. Twierdzenie to zstało więc — w przybliżeniu — udowodnione.

Twierdzenie Tarskiego. Twierdzenie Tarskiego, które udowodnili niezależnie od siebie Alfred Tarski i Gödel, jest odkryciem pokrewnym w stosunku do Pierwszego Twierdzenia Gödla. Twierdzenie Tarskiego głosi, że w ramach bogatej i niesprzecznej teorii nie można zdefiniować pojęcia prawdy. Pojęcie prawdy miałoby się pojawić w teorii wraz z wyrażeniem

$$\mathtt{Pr}(x), \tag{5.63}$$

które należy odczytywać: wyrażenie o numerze x jest prawdziwe, ewentualnie: liczba x jest numerem wyrażenia prawdziwego. Definicja prawdy przyjmuje wówczas postać:

$$\mathtt{Pr}(\mathtt{nr}(\mathcal{A})) \equiv \mathcal{A}, \tag{5.64}$$

to znaczy, wyrażenie o numerze $\mathtt{nr}(\mathcal{A})$ jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$. Rzeczywiście, przecież liczba $\mathtt{nr}(\mathcal{A})$ jest z definicji numerem wyrażenia $\mathcal{A}$. Równoważność (5.64) może być uznana za definicję prawdy pod tym warunkiem, że jest spełniona przez każde wyrażenie języka danej teorii. Pierwsze Twierdzenie Gödla ustalało pewne własności pojęcia dowodliwości, należącego do danej teorii. Tymczasem Twierdzenie Tarskiego wyklucza możliwość pojawienia się w takiej teorii pojęcia prawdy.

Twierdzenie 35 (Tarski) *Jeżeli jakakolwiek teoria T jest zarazem bogata i niesprzeczna, to równoważność* $\ulcorner \mathtt{Pr}(\mathtt{nr}(\mathcal{A})) \equiv \mathcal{A} \urcorner$, *zwana definicją prawdy, nie jest w teorii T dowodliwa dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$.*

Twierdzenie Tarskiego, z nieco innego punktu widzenia niż Pierwsze Twierdzenie Gödla, odsłania granice aksjomatyzacji. Okazuje się, że prawda zawsze przekracza ramy możliwej do skonstruowania teorii.

Dowód Twierdzenia Tarskiego opiera się na arytmetyzacji i diagonalizacji, które ćwiczyliśmy już na dowodzie Pierwszego Twierdzenia Gödla. Będzie to dowód nie wprost. Załóżmy, że teoria T jest bogata i niesprzeczna, a ponadto dla dowolnego wyrażenia $\mathcal{A}$ równoważność (5.64) jest dowodliwa w teorii T. Pokażemy, że to założenie prowadzi do sprzeczności. Zauważmy, że wyrażenie

$$\neg\mathtt{Pr}(x), \tag{5.65}$$

które należy odczytywać: wyrażenie numer x nie jest prawdziwe, zawiera dokładnie jedną zmienną wolną. Zatem, na mocy twierdzenia 33, w języku danej teorii istnieje punkt stały tego wyrażenia. Na cześć Tarskiego nazwiemy punkt stały wyrażenia (5.65) zostanie nazwany zdaniem $\mathtt{t}$. Zatem równoważność

$$\neg\mathtt{Pr}(\mathtt{nr}(\mathtt{t})) \equiv \mathtt{t} \tag{5.66}$$

jest dowodliwa w teorii T. Zgodnie z tą równoważnością zdanie $\mathtt{t}$ stwierdza o sobie samym: nie jestem prawdą. Skoro jednak definicja prawdy (5.64) obowiązuje dla wszelkich wyrażeń, to równoważność

$$\mathtt{Pr}(\mathtt{nr}(\mathtt{t})) \equiv \mathtt{t} \tag{5.67}$$

również jest dowodliwa w teorii T. Z wyrażeń (5.66) oraz (5.67) wynika, oczywiście, na mocy klasyczngo rachunku zdań równoważność

$$\mathtt{Pr}(\mathtt{nr}(\mathtt{t})) \equiv \neg\mathtt{Pr}(\mathtt{nr}(\mathtt{t})), \tag{5.68}$$

które jest tym samym dowodliwe. Ponieważ zaś, jak już wiemy, z dowolnej równoważności $\ulcorner\mathcal{A} \equiv \neg\mathcal{A}\urcorner$ wynika zarówno wyrażenie $\mathcal{A}$, jak i jego negacja $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$, w teorii T dowodliwe są wyrażenia:

$$\mathtt{Pr}(\mathtt{nr}(\mathtt{t})), \neg\mathtt{Pr}(\mathtt{nr}(\mathtt{t})),$$

co sprawia, że teoria T jest sprzeczna. Założyliśmy jednak, że ta teoria jest niesprzeczna. Wobec tego nie jest możliwe, żeby powstała teoria zarazem bogata, niesprzeczna i zawierająca twierdzenie (5.64) definiujące prawdę. Tak właśnie stanowi Twierdzenie Tarskiego, które zostało właśnie dowiedzione.

Drugie Twierdzenie Gödla. Drugie Twierdzenie Gödla opiera się istotnie na Pierwszym Twierdzeniu Gödla, ale dotyczy wartości dowodów niesprzeczności bogatych teorii. Dodajmy od razu, że w świetle Drugiego Twierdzenia Gödla wartość tych dowodów jest mniejsza niż mogłoby się na pierwszy rzut oka wydawać.

Twierdzenie 36 (Gödel II) *Jeżeli jakakolwiek teoria T jest zarazem bogata i niesprzeczna, to twierdzenie o niesprzeczności teorii T nie jest dowodliwe w ramach tejże teorii T.*

Załóżmy, że teoria T jest bogata i niesprzeczna. Z Pierwszego Twierdzenia Gödla wiemy, że właściwe dla języka tej teorii zdanie gödlowskie $\mathtt{g}$ nie jest dowodliwe w T. Co więcej, z dowodu Pierwszego Twierdzenia Gödla wiemy, że po dołączeniu do T zdania $\mathtt{g}$ powstaje bogata, ale sprzeczna teoria T'. Istnieje więc takie wyrażenie $\mathcal{A}$, że antylogia

$$\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} \tag{5.69}$$

jest dowodliwa w teorii T'. Wobec tego, na mocy zależności (5.56), również wyrażenie

$$\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})) \tag{5.70}$$

jest dowodliwe w teorii T'. Zatem, na mocy Twierdzenia o Dedukcji, implikacja

$$\mathtt{g} \rightarrow \mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})) \tag{5.71}$$

jest dowodliwa w teorii T. Stąd i z równoważności (5.58), która charakteryzuje zdanie $\mathtt{g}$, wynika, że wyrażenie

$$\neg\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathtt{g})) \rightarrow \mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})) \tag{5.72}$$

jest dowodliwe w teorii T. Załóżmy teraz, że zdanie

$$\neg\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})), \tag{5.73}$$

stwierdzające niesprzeczność teorii, jest dowodliwe w teorii T. Z twierdzeń (5.72) i (5.73), na mocy reguły Modus Tollens, wynika, że wyrażenie

$$\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathtt{g})) \tag{5.74}$$

jest dowodliwe w teorii T, a więc, na mocy zależności (5.56) dowodliwe jest zdanie $\mathtt{g}$. Z drugiej strony, skoro zdanie $\mathtt{g}$ jest dowodliwe, to, wobec równoważności (5.58), dowodliwe jest też wyrażenie

$$\neg\mathtt{Dow}(\mathtt{nr}(\mathtt{g})). \tag{5.75}$$

Gdyby tak było, teoria T okazałaby się sprzeczna, co kłóci się z przyjętym założeniem. Zatem twierdzenie o niesprzeczności bogatej teorii nie może być twierdzeniem tej teorii.

Zatem twierdzenie o niesprzeczności bogatej i niesprzecznej teorii T_1 może być dowiedzione tylko na gruncie jakiejś innej teorii, powiedzmy T_2. Jeśli teoria T_2 jest niesprzeczna, taki dowód może zamykać sprawę niesprzeczności teorii T_1. Jeśli jednak teoria T_2 sama jest sprzeczna, to — jak wiadomo — można w jej ramach udowodnić dowolne wyrażenie, również twierdzenie o niesprzeczności teorii T_1. To, czy teoria T_1 faktycznie jest niesprzeczna, czy nie, nie ma przy tym żadnego znaczenia. W sprzecznej teorii T_2 można udowodnić niesprzeczność dowolnej sprzecznej teorii. Przy tym teoria T_2 również musi być bogata, skoro należy do niej wyrażenie (5.55). Dowód niesprzeczności teorii T_2 można przeprowadzić jedynie na gruncie jakiejś jeszcze innej, bogatej teorii T_3 itd. Ogólnie rzecz biorąc, dowody niesprzeczności teorii bogatych są zawieszone w próżni. Opierają się ostatecznie na wierze w niesprzeczność głównych teorii matematycznych.

Rozdział 6

Elementy filozofii nauki

6.1 Organizacja wiedzy

Typy nauk. Powiedzieliśmy, że wiedza jest to ogół wiarygodnych informacji. Jest to całość bardzo zróżnicowana, odległa od bycia jednolitym systemem. Dysponujemy raczej różnymi typami wiedzy, powiązanymi wewnętrznie i między sobą przez skomplikowaną sieć zależności.

Wiedza potoczna. Na wiedzę potoczną składają się informacje nabywane spontanicznie — często nawet przypadkowo — przy okazji zaspokajania powszechnych potrzeb życia codziennego. Wiedza potoczna ma więc cele praktyczne. Jest też wieloaspektowa i niedokładna. Stanowi bowiem zlepek ujęć i obrazów, pochodzących z różnych źródeł i różnych punktów widzenia. Jest nieuporządkowana i pełna luk. Instancją oceniającą w ramach wiedzy potocznej jest *zdrowy rozsądek*, który generalnie zapewnia wiarygodność, ale bez krytycznych, kontrolnych przeglądów nie chroni w szczegółach przed błędem i niespójnością. Mimo wszystkich słabości wiedza potoczna ma charakter podstawowy i powszechny. Jej zdobycie nie wymaga specjalnego wykształcenia ani kompetencji. Cechuje się też ona dużą trwałością — należy do najtrwalszych typów wiedzy. Przykładem wiedzy potocznej jest sąd, że przedmioty materialne zwykle spadają w dół, dopóki nie natrafią na dostatecznie silny opór.

Mądrość. Można powiedzieć, że mądrość jest technologią dobrego, udanego życia. Mądry jest taki człowiek, który umie dokonywać właściwych wyborów życiowych. Zasadniczo mamy tu do czynienia z wiedzą praktyczną, ale domagającą się podstaw teoretycznych. Do istoty mądrości należy umiejętność właściwego oceniania, wartościowania. Poprawna ocena spraw życia możliwa jest wyłącznie przy zachowaniu odpowiedniego dystansu, dlatego do mądrości należy umiejętność patrzenia na obecne zdarzenia z perspektywy całego życia, z perspektywy chwili śmierci, a nawet wieczności.

Mądrości często nabywa się wraz z doświadczeniem, wiekiem, nie jest to jednak proces automatyczny. Doświadczenie życiowe jest szansą nabycia mądrości. Tę szansę można dzięki osobistemu zaangażowaniu wykorzystać lub zaprzepaścić. Człowiek starszy, bardziej doświadczony ma większe szanse nabycia mądrości niż człowiek młody, nawet inteligentny i świetnie wykształcony. Jeśli jednak ktoś systematycznie marnuje życie, to sam wiek i doświadczenie nie zagwarantują mu mądrości, przeciwnie, będą sprzyjać utrwaleniu głupoty. Sposobem na przyśpieszenie nabywania mądrości jest bliskie, osobiste przestawanie z ludźmi mądrymi. Przykładem mądrości są oceny: lepiej dochować wierności tradycji niż ulegać aktualnie rozpowszechnionej modzie, zwykle bardziej godny zaufania jest ten, kto spokojnie wypełnia swoje obowiązki, niż wizjoner-rewolucjonista.

Wiara. Na wiarę składają się zdania uznane za prawdę aktem woli, ze względu na autorytet kogoś, kto tę prawdę przekazuje. Zasadność aktu wiary jest oceniana ze względu na wartość autorytetu. Jeśli test autorytetu wypada pomyślnie, wiara może być bardzo solidną wiedzą. Na przykład dziecko dowiaduje się wielu rzeczy, wierząc matce lub ojcu. Najbardziej bezzasadne, arbitralne wierzenia nazywamy *zabobonami*. Przykładem rozpowszechnionego zabobonu jest wiara w to, że ludzie w minionych wiekach byli przeważnie głupi, a przynajmniej naiwni, łatwowierni i bezkrytyczni, współcześni zaś ogarnęli większość tajemnic i stanowią społeczeństwo oparte na wiedzy. Innym, równie naiwnym, zabobonem jest astrologia. Najbardziej bezkrytycznie uznawanymi autorytetami XXI w. są, zapewne, dziennikarze i prawnicy.

Wiara najczęściej kojarzona jest z religijną sferą życia. Należy jednak pamiętać, że oprócz *wiary religijnej* istnieje również *wiara świecka*, na przykład wiara demokratyczna.

Światopogląd. W skład światopoglądu danej osoby wchodzą przekonania, które pozwalają tej osobie uchwycić i uporządkować całość jej doświadczeń, tworząc z nich zrozumiałą jedność. Składnikami światopoglądu są zwykle twierdzenia dotyczące sposobu urządzenia świata, miejsca danej jednostki w świecie i sensu życia, a także preferencje aksjologiczne i normy moralne. Celem posiadania światopoglądu jest zarówno zrozumienie własnego życia, jak też stworzenie osobistego programu działania. Przykładami tez światopoglądowych są: materializm, zgodnie z którym życie człowieka — podobnie jak cała reszta rzeczywistości — jest wytworem zbiegów okoliczności, i teizm, zgodnie z którym rzeczywistość kryje w sobie jakiś zamysł tajemniczej, nadrzędnej istoty, która chce wejść w kontakt z człowiekiem, a życie jest formą tego kontaktu i osobistym wezwaniem.

Światopogląd może być mniej lub bardziej wiarygodny, racjonalny. Nie istnieje natomiast światopogląd naukowy — światopogląd z definicji nigdy nauką nie jest. Można natomiast dążyć do posiadania światopoglądu niesprzecznego z aktualnie uznawanymi teoriami naukowymi.

Ideologia. Przekonania, które dana osoba uznaje za prawdę wyłącznie lub głównie w tym celu, żeby za ich pomocą usprawiedliwić swoje postępowanie, nazywamy ideologią tej osoby. Ideologia nigdy nie stanowi wiarygodnej informacji o świecie, nigdy nie zasługuje na miano wiedzy. Jest raczej karykaturą wiedzy. Ideologię uprawia na przykład ktoś, kto podważa prawo własności, żeby usprawiedliwić zamierzoną lub popełnioną kradzież, oraz ktoś, kto podważa trwałość małżeństwa w tym celu, żeby wytłumaczyć się przed samym sobą lub przed innymi z porzucenia żony.

Wiedza naukowa. Nauka jest to wiedza uzasadniona i dyskursywna, a ponadto planowa, aspektowa i fachowa. Dwie pierwsze cechy wiedzy naukowej są istotne. Prawo obywatelstwa w nauce mają tylko zdania odpowiednio uzasadnione. Brak lub poważny niedostatek uzasadnienia wyklucza z nauki nawet najbardziej oryginalne i twórcze przekonania. Nauka jest też wyrażona w takim języku, który daje każdej przygotowanej osobie dostęp poznawczy do twierdzeń tej nauki i do uzasadnienia tych twierdzeń. Dyskursywność ma więc zapewnić możliwość kontroli treściowej zawartości wiedzy naukowej. Planowość przeciwstawia się spontaniczności wiedzy potocznej i polega na tym, że wiedza naukowa jest zdobywana w sposób zamierzony, w rezultacie prób rozwiązania z góry postawionych problemów. Aspektowość to określenie punktu widzenia, a fachowość to zwykły wymóg odpowiedniego treningu, zwanego często studiami.

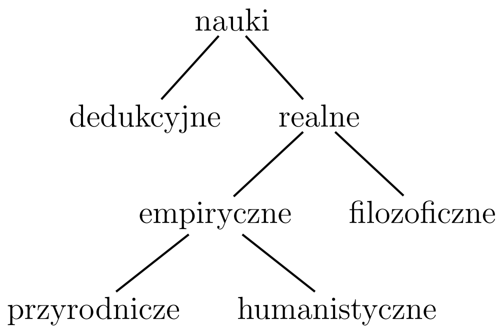
Wiedza naukowa nie jest jednorodna. Nie ma jednej, wszechogarniającej nauki, za to jest wiele nauk, a nawet wiele teorii naukowych, często trudnych do uzgodnienia między sobą. Poszczególne nauki, które są charakteryzowane głównie z uwagi na przedmiot dociekań, grupujemy w odmienne pod względem stosowanych metod *typy* nauk. Można wyodrębnić cztery główne typy wiedzy naukowej:

- nauki dedukcyjne,
- nauki przyrodnicze,
- nauki humanistyczne,

- nauki filozoficzne.

Typową nauką dedukcyjną jest matematyka. Naukami przyrodniczymi są: fizyka, astronomia, biologia, chemia i nauki o Ziemi. Za nauki humanistyczne uznajemy historię, lingwistykę (filologie), nauki prawne (prawoznawstwo), teologię, psychologię, ekonomię, nauki o wychowaniu (pedagogikę), nauki o społeczeństwie (politologię i socjologię) i kulturoznawstwo. Najbardziej typowymi naukami filozoficznymi są: teoria bytu (ontologia), teoria poznania (epistemologia), filozofia moralności (etyka) i filozofia nauki. Nauki przyrodnicze i nauki humanistyczne mogą być łącznie określane jako nauki empiryczne. Natomiast nauki przyrodnicze, humanistyczne i filozoficzne są czasem łącznie określane jako nauki realne. Nauki dedukcyjne i nauki przyrodnicze są niekiedy nazywane naukami ścisłymi. Czasami za nauki ścisłe uchodzą wyłącznie: logika, matematyka, fizyka i astronomia.

Typy nauk różnią się między sobą przede wszystkim dozwolonymi na ich gruncie sposobami uzasadniania twierdzeń. Na przykład teza, którą udało się potwierdzić na drodze eksperymanrtalnej, może być z tego powodu uznana za uzasadnioną w ramach fizyki, ale nie w ramach matematyki.



Tablica 6.1: Typy nauk

Istota nauk dedukcyjnych. Za dedukcyjne uznajemy te nauki, w których dedukcja jest *jedynym* dozwolonym sposobem uzasadniania twierdzeń. Znaczy to, że w naukach dedukcyjnych dzielimy zdania na uzasadnione dedukcyjnie i nieuzasadnione. Należy dobrze sobie uzmysłowić, że spośród dozwolonych sposobów uzasadniania wykluczamy tutaj zarówno wnioskowania zawodne, jak uzasadnienie bezpośrednie. Najbardziej charakterystyczne dla nauk dedukcyjnych są trzy cechy:

(a) teorie wolno opierać na całkiem dowolnych założeniach,

(b) twierdzeniami są wyłącznie logiczne konsekwencje przyjętych założeń,

(c) twierdzenia dotyczą wyłącznie struktury rozważanych obiektów.

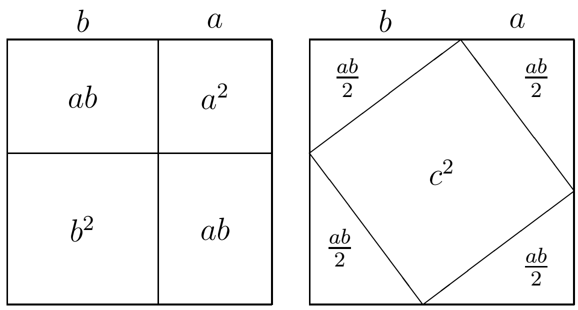
Można powiedzieć, że istotą nauk dedukcyjnych jest wnioskowanie dedukcyjne z całkowicie dowolnych przesłanek. Typową nauką dedukcyjną jest matematyka. Jest to zarazem najbardziej rozwinięta i najbardziej zaawansowana nauka dedukcyjna. Omawiając istotne cechy nauk dedukcyjnych, posłużymy się jej przykładem.

Tworząc teorię matematyczną, wolno uznać takie założenia, na jakie ma się ochotę. Można powiedzieć obrazowo, że w punkcie wyjścia matematyk może opowiedzieć dowolną bajkę. To, czy w rzeczywistości cokolwiek odpowiada zmyślonym matematycznym tworom, nie ma żadnego znaczenia.

Uświadomienie sobie tej osobliwej własności nauk dedukcyjnych zabrało uczonym sporo czasu. Przez stulecia panowało powszechne przekonanie, że nauki dedukcyjne muszą opierać się na jakichś przesłankach uzasadnionych bezpośrednio, to znaczy, na przesłankach oczywistych. Nie można było uzyskać zgody tylko w odniesieniu do tego, skąd się ta oczywistość bierze. Zwykle wchodziły w grę cztery możliwości: doświadczenie zmysłowe, doświadczenie czyste, konstytucja umysłu, konstytucja języka. Rozważano taką możliwość, że założenia matematyki są potwierdzone przez zwykłe doświadczenie zmysłowe, które jest tak powszechne, że staje się całkiem nieświadome. Z doświadczenia wiemy zarówno to, że króliki są szybkie, jak to, że $3 + 1 = 4$. To ostatnie doświadczenie powtarza się tak często, że zaczynamy odnosić wrażenie, jakbyśmy matematyczną prawdę znali niezależnie od doświadczenia. Sugerowano też, że jesteśmy wyposażeni w zdolność doświadczenia czystego, to znaczy niewymagającego użycia narządów zmysłowych, duchowego oglądu. Świat matematyczny — nie tylko on zresztą — mógłby być przedmiotem takiego właśnie oglądu. Można też spotkać taki pogląd, że ludzki umysł został po prostu tak skonstruowany, że nie jest w stanie myśleć inaczej niż tak, że $3 + 1 = 4$. Wielu badaczy sądziło też, że założenia matematyki są zdaniami analitycznymi, to znaczy objaśniają jedynie znaczenie zawartych w nich słów. Zdanie „$3 + 1 = 4$” objaśnia znaczenie nazw liczb i działań matematycznych podobnie, jak zdanie „żaden kawaler nie jest żonaty” objaśnia znaczenie nazwy „kawaler”.

Rzecz jasna, można i warto badać logiczne konsekwencje różnych rodzajów zdań oczywistych. Można jednak tworzyć teorie matematyczne, niemające z oczywistością nic wspólnego. Na gruncie geometrii euklidesowej można udowonić, że suma kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta równa się 180°. Stworzono jednak geometrie nieeuklidesowe, na których gruncie można udowodnić, że suma kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest większa niż 180°, i geometrie nieeuklidesowe, na których gruncie można udowodnić, że suma kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest mniejsza niż 180°. Powtórzmy, że matematyka składa się z teorii opartych na zupełnie dowolnych założeniach. Niektóre z tych założeń są oczywiste, inne nie. Niektóre stoją w jawnym konflikcie z tym, co może robić wrażenie oczywistości.

Za uzasadnione twierdzenia teorii matematycznej wolno uznać wyłącznie te zdania, które wynikają z przyjętych założeń. Miejsce dowolności zajmuje tutaj rygorystyczna logika. Stąd właśnie nauki dedukcyjne biorą swoją nazwę. Mówiąc to, nie odmawiamy intuicji ani indukcji roli inspiracji. Twierdzenie może zostać zasugerowane matematykowi na różne sposoby. Ostatecznie może mu się nawet przyśnić. Pitagoras wpadł prawdopodobnie na



Tablica 6.2: Układanka Pitagorasa

trop słynnego twierdzenia o trójkątach prostokątnych na drodze indukcyjnej. Dowiedział się od Egipcjan, że trójkąt o bokach: 3, 4 i 5 jest prostokątny. Tę prawidłowość wykorzystywano w pomiarach pól. Następnie zauważył, że suma kwadratów przyprostokątnych równa się w tym wypadku kwadratowi przeciwprostokątnej: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Wówczas Pitagoras mógł doznać nawet chwilowego olśnienia. W każdym razie postawił hipotezę, że tak jest w wypadku każdego trójkąta prostokątnego. To jednak nie jest jeszcze żaden dowód. Wiele wskazuje na to, że Pitagorsa dowiódł swgo twierdzenia na gruncie geometrycznym, za pomocą układanki zaprezentowanej na tablicy 6.2. Składa się ona z trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych a, b, przeciwprostokątnej c oraz z kwadratów zbudowanych na bokach tych trójkątów. Pokazuje ona, że

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$
$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab,$$

a więc kwadrat o boku a, kwadrat o boku b i cztery trójkąty rozważane trójkąty dają w sumie tę samą powierzchnię, co kwadrat o boku c i cztery rozważane trójkąty. Jest to w obu wypadkach powierzchnia kwadratu o boku $(a + b)$. Taki dowód ma wartość, o ile prawdziwe są geometryczne założenia, na których się opiera. Dobór założeń, jak powiedzieliśmy, jest jednak w matematyce kwestią woli. W każdym razie, bez względu na to, w jaki sposób matematyk wpadł na trop twierdzenia, spoczywa na nim obowiązek przeprowadzenia rygorystycznego dowodu.

Z drugą istotną cechą nauk dedukcyjnych wiąże się jeszcze problem wyrastający z Pierwszego Twierdzenia Gödla. Wiadomo, że żadna teoria aksjomatyczna zawierająca arytmetykę nie jest pełna. Zatem istnieją prawdziwe twierdzenia matematyczne, które nie są konsekwencjami aksjomatów. Jednakże to zastrzeżenie dotyczy wyłącznie teorii aksjomatycznych i znaczy mniej więcej tyle, że teorii matematycznych nie da się w pełni zaksjomatyzować. Dlatego właśnie mówiliśmy o założeniach nauk dedukcyjnych, unikając użycie terminu „aksjomat”. Dążąc do aksjomatyzacji teorii matematycznych, musimy mieć świadomość, że to zadanie nigdy nie zostanie ostatecznie spełnione. Intuicji nie da się całkiem z matematyki wyeliminować. Zbiór założeń teorii matematycznych pozostaje więc zawsze kwestią w pewnym sensie otwartą.

Trzecia istotna cecha nauk dedukcyjnych — strukturalność — tylko pozornie słabo wiąże się z dwiema poprzednimi. Otóż dedukcyjny charakter teorii matematycznych sprawia, że w matematyce nigdy nie mamy do czynienia z pełnokrwistymi przedmiotami, mającymi własną, wewnętrzną naturę. Teorie matematyczne opisują raczej różne typy relacji, związków między dowolnymi przedmiotami. Badania matematyczne nie dotyczą samych przedmiotów, ale tylko systemu relacji między tymi przedmiotami. Przedmioty występują tu wyłącznie jako anonimowe punkty w strukturze. Przedmiot dociekań matematycznych, zwany *dziedziną matematyczną*, jest to dowolny zbiór jakichkolwiek przedmiotów, powiązanych określonymi relacjami i funkcjami. Przykładem dziedziny matematycznej jest zbiór liczb naturalnych z określoną w nim operacją dodawania. Otóż teoria matematyczna w gruncie rzeczy nie zawiera żadnej informacji o samych liczbach naturalnych, lecz jedynie o dodawaniu.

Strukturalność matematyki może być najłatwiej zrozumiana w oparciu o przykłady. Zastanówmy się nad dwiema dziedzinami matematycznymi: zbiór liczb rzeczywistych, zbiór punktów na linii prostej. Okazuje się, że nie ma żadnego matematycznego sposobu na ich odróżnienie. Z punktu widzenia matematyki punkty na prostej i liczby rzeczywiste są tym samym, ponieważ pozostają między sobą w analogicznych układach.

Uświadomienie sobie tej ostatniej własności teorii matematycznych również zajęło ludzkości sporo czasu. W Starożytności panowało przekonanie, że przedmiotem matematyki są liczby i figury geometryczne. Matematycy nowożytni przenieśli akcent z liczb na funkcje liczbowe. Znacznie później uświadomiono sobie, że twierdzenia matematyczne dotyczą dowolnych funkcji dowolnych przedmiotów.

W pewnym sensie matematyka jest gigantycznym katalogiem przykładów wynikania logicznego. Teorie matematyczne nie stanowią, że ich twierdzenia są prawdziwe, ale tylko tyle, że wynikają z określonych aksjomatów.

Nauki empiryczne. Nauki empiryczne różnią się istotnie od dedukcyjnych zarówno pod względem możliwych do zaakceptowania ostatecznych przesłanek, jak i pod względem dozwolonych sposobów uzasadniania twierdzeń. Teoretyczna baza, czyli zbiór ostatecznych przesłanek, w naukach empirycznych rozpada się na dwa podzbiory:

- zdania percepcyjne (spostrzeżeniowe),
- niesprawdzalne założenia.

Pierwszy z tych podzbiorów stanowi bazę *wewnętrzną*, a drugi bazę *zewnętrzną* teorii. Zdania percepcyjne pojmujemy jako zdania uzasadnione bezpośrednio przez odwołanie do doświadczenia zmysłowego, czyli zdania bezpośrednio oparte na doświadczeniu zmysłowym. Niesprawdzalnymi założeniami, które składają się na bazę zewnętrzną, nazywamy zdania, które w ramach teorii nie są w żaden sposób uzasadnione. Ich status jest więc pod pewnym względem podobny do statusu ostatecznych przesłanek w naukach dedukcyjnych. Jednakże w naukach empirycznych nie panuje pełna dowolność w przyjmowaniu nawet niesprawdzalnych założeń. Baza zewnętrzna może być niekiedy zbiorem pustym, ale w ważnych teoriach raczej się to nie zdarza.

Jako uzasadnienie pośrednie w naukach empirycznych dozwolone jest wnioskowanie dedukcyjne i wnioskowanie indukcyjne. O ile jednak każde wnioskowanie dedukcyjne ma prawo obywatelstwa w dowolnej nauce empirycznej, o tyle z indukcji wolno korzystać tylko w ograniczony sposób. Rodzaj dopuszczalnych wnioskowań indukcyjnych zależy od typów nauk, a nawet od poszczególnych nauk.

Nauki empiryczne dzielimy na przyrodnicze i humanistyczne. Nauki przyrodnicze różnią się od nauk humanistycznych przede wszystki typem dopuszczalnych wnioskowań indukcyjnych. Scharakteryzujemy indukcję *przyrodniczą* oraz indukcję *humanistyczną*.

Żeby scharakteryzować indukcję przyrodniczą, posłużymy się pojęciem zdania *sprawdzalnego empirycznie* (*empirycznego*). Powiemy więc, że zdanie $\mathcal{A}$ jest empiryczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie niesprzeczne zbiory X, X' zdań percepcyjnych, że ze zbioru X wynika zdanie $\mathcal{A}$, a ze zbioru X' wynika negacja zdania $\mathcal{A}$. Zbiory X, X' mogą być nieskończone. Zatem zdaniami empirycznymi są zarówno zdania percepcyjne, jak też zdania, których nie da się uzasadnić ani obalić wyłącznie przez odwołanie do doświadczenia zmysłowego. Na przykład zdanie „masa ciała zmienia się wraz z prędkością” jest empirycznie sprawdzalne, choć nikt nie może zmierzyć masy wszystkich ciał w każdej chwili historii wszechświata. Jednakże zasadniczo można pomyśleć o takim nieskończenie wielkim zestawie pomiarów.

Z indukcją przyrodniczą mamy do czynienia wtedy, gdy zarówno przesłanki, jak i konkluzja wnioskowania indukcyjnego są zdaniami empirycznymi. Natomiast w tle tego wnioskowania mogą występować zarówno zdania empiryczne, jak przyjęte niesprawdzalne założenia. Indukcja przyrodnicza jest jedyną formą wnioskowania indukcyjnego dozwoloną jako sposób uzasadniania twierdzeń nauk przyrodniczych.

Pojęcie zdania empirycznie sprawdzalnego i pojęcie indukcji przyrodniczej może ulegać rozszerzeniom wraz z rozwojem teorii. Początkowo, tworząc teorię przyrodniczą T, możemy uznać zdanie $\mathcal{A}$ za empiryczne dokładnie wtedy, gdy ono samo i jego negacja wynika logicznie z przepisanych zbiorów zdań spostrzeżeniowych. Kiedy teoria przyrodnicza T zostanie już ugruntowana, przyrodnicy są zwykle gotowi do uznania zdania $\mathcal{A}$ za empiryczne również wtedy, gdy ono samo i jego negacja wynikają z właściwych zbiorów zdań spostrzeżeniowych tylko entymematycznie, na gruncie teorii T. Zatem wraz z rozwojem danej nauki przyrodniczej poszerza się w pewnym sensie również jej baza, poszerza się bowiem zakres zdań traktowanych jako empiryczne.

Charakteryzując indukcję humanistyczną, posłużymy się pojęciem zachowania *racjonalnego*. Zachowanie obiektu (podmiotu) x jest racjonalne wtedy i tylko wtedy, gdy przez to zachowanie lub jego rezultaty x świadomie usiłuje zrealizować wyznaczone cele. Zachowanie racjonalne określamy też jako zamierzone lub umyślne, osobowe. Racjonalnym zachowaniem może być zarówno podjęcie pewnej czynności, jak i powstrzymanie się od niej. Wybieram się na dworzec kolejowy, jeśli chcę odbyć podróż, ale nie wybieram się na dworzec kolejowy, jeśli chcę pozostać w domu. Rezultatem zachowania się zawsze jest jakiś stan rzeczy, na przykład moja obecność w odległym mieście może być rezultatem podjętej wyprawy. Rezultat racjonalnego zachowania, które polega m.in. na wykonaniu pewnych czynności, może przyjąć postać wytworu tych czynności. Wytworem czynności może być zarówno przedmiot materialny, jak i niematerialny. Wytworzem czynności garncarza może być garnek. Wytworem zestawu czynności, które składają się na uprzejme zachowanie, i powstrzymania się od czynności przeciwnych może być dobra atmosfera.

Indukcja humanistyczna (osobowa) jest to wnioskowanie, w którego przesłankach opisano racjonalne zachowanie się lub rezultat racjonalnego zachowania się jakiegoś podmiotu lub podmiotów, a we wniosku opisano stan świadomości tego podmiotu lub podmiotów, w szczególności stan wiedzy lub stan woli (motywacja, zamierzone cele, hierarchia wartości), lub jedno i drugie. W tle indukcji zawsze występuje założenie, że w grę wchodzi zachowanie racjonalne (założenie o racjonalności). Jeśli w tle indukcji występują ponadto informacje o stanie wiedzy podmiotu, to w konkluzji domyślamy się stanu woli tego podmiotu. Jeśli w tle występują informacje o stanie woli podmiotu, to w konkluzji domyślamy się stanu wiedzy tego podmiotu. W najgorszym wypadku, jeśli w tle indukcji nie zawiera się żadna informacja o stanie świadomości podmiotu lub zawiera się tylko informacja szczątkowa, usiłujemy domyślić się zarówno stanu wiedzy, jak stanu woli podmiotu.

Jeśli, na przykład, mamy do dyspozycji przesłankę „Antygona pogrzebała ciało brata", a w tle indukcji założenie, że było to racjonalne zachowanie, i stwierdzenie, że Antygona uważała pogrzebanie zmarłego za obowiązek płynący z boskiego prawa, to możemy wysnuć wniosek, że Antygona spełniła boski nakaz. Jeśli ponadto w tle indukcji pojawia się pochodzący od Sofoklesa opis okoliczności zdarzenia, to możemy wysnuć indukcyjny wniosek dotyczący hierarchii wartości Antygony: wyżej ceniła prawo boskie niż ludzkie. Rzeczywiście, wnioskowanie:

Antygona pogrzebała ciało brata,
___
Antygona wyżej ceniła prawo boskie niż ludzkie

na tle znanej tragedii jest indukcją, ponieważ hipotetyczne wnioskowanie:

Antygona wyżej ceniła prawo boskie niż ludzkie,
prawo boskie każe grzebać ciała zmarłych,
prawo ludzkie zabroniło pochówku brata,
Antygona miała sposobność, by pogrzebać ciało brata,
Antygona działała racjonalnie,
___
Antygona pogrzebała ciało brata

ma charakter dedukcyjny. Pierwsza przesłanka jest konkluzją rozważanej indukcji, pozostałe przesłanki pochodzą z tła, przy tym ostatnią stanowi założenie o racjonalności. Zatem istota indukcji humanistycznej sprowadza się do tego, że o pewnych stanach rzeczy zakładamy, że są rezultatem racjonalnego zachowania pewnej osoby lub osób, i usiłujemy indukcyjnie dociec stanu ducha tych osób.

Na wyróżnienie spośród wszystkich zachowań racjonalnych zasługują zachowania *symboliczne*. Zachowanie osoby x jest symboliczne wtedy i tylko wtedy, gdy celem, który osoba x usiłuje przez to zachowanie zrealizować, jest skłonienie jakiegoś podmiotu y do przeprowadzenia indukcji humanistycznej o określonym wniosku dotyczącym stanu świadomości osoby x. Przykładowo Antygona, grzebiąc ciało brata, zachowała się racjonalnie, ale zamierzone przez nią cele mogły zostać zrealizowane bez względu na to, czy ktoś wiedział o jej zacjowaniu, czy nie. Jeśli jednak piszę do kogoś list, również zachowuję się racjonalnie. W tym wszakże wypadku celem mojego zachowania jest to, żeby ktoś, kto ten list zobaczy, indukcyjnie wywnioskował z określonego układu plamek atramentu zaschniętych na papierze pewne zdania dotyczące mojego stanu mentalnego. Jeśli, na przykład, piszę w liście „kocham Cię”, chcę, żeby adresatka, przyglądając się temu listowi, wywnioskowała indukcyjnie, że ją kocham. Jeśli do takiego wnioskowania nie dojdzie, zamierzony cel nie zostanie zrealizowany. Pisanie listu jest więc czynnością nie tylko racjonalną, ale nadto symboliczną. Zachowanie symboliczne lub rezultat zachowania symbolicznego określamy często jako *znak* lub *symbol*. Niekiedy, zwykle wtedy, gdy znak jest rozbudowany, nazywamy go też *tekstem*. Indukcja humanistyczna, w której przesłankach występuje opis pewnych zachowań symbolicznych lub ich rezultatów, bywa określana jako *odczytanie* symbolu lub tekstu.

Żeby uzmysłowić sobie różnicę zachodzącą między indukcją przyrodniczą a humanistyczną, wyobraźmy sobie, że prace wykopaliskowe doprowadziły do odkrycia na pewnej głębokości ludzkich szczątków. W ramach indukcji przyrodniczej wolno stąd wysnuć wniosek, że znalezione szczątki pochodzą z określonego czasu, niekiedy możena określić wiek i płeć osób, do których te szczątki należały, ewentualnie podać przyczynę śmierci. Natomiast indukcja humanistyczna może prowadzić do wniosku, że mamy do czynienia z cmentarzem lub że w miejscu wykopalisk znajdowała się świątynia, w której składano ofiary z ludzi. Tego typu wniosków nie wolno wysnuć w ramach indukcji przyrodniczej.

Na gruncie nauk humanistycznych dozwolona jest zarówno indukcja przyrodnicza, jak indukcja humanistyczna. Jak widać główny podział wśród nauk humanistycznych polega na tym, że w naukach humanistycznych, wnioskując indukcyjnie, wolno odwoływać się do racjonalnych zachowań podmiotu, a więc do stanu jego ducha, podczas gdy w naukach przyrodniczych jest to zabronione. W poszczególnych naukach mogą obowiązywać dalsze zastrzeżenia dotyczące dozwolonych typów wnioskowania indukcyjnego.

Wypada omówić jeszcze pozycję niesprawdzalnych założeń teorii empirycznych. Rozważmy prostą teorię empiryczną, zwaną geometrią fizyczną. Rozwój badań nad taką teorią jest związany z powstaniem ogólnej teorii względności. Przyjmujemy aksjomaty geometrii euklidesowej oraz pewne definicje, identyfikujące — na przykład — odcinek prostej z torem promienia świetlnego w próżni bądź ustalające jednostki pomiaru. W ten sposób twierdzenia geometrii mogą się stać — prawdziwymi lub fałszywymi — zdaniami opisującymi świat fizyczny. Z drugiej strony powstaje nowa teoria, sformułowana w nowym języku. Albowiem promień świetlny nie jest linią prostą — jednowymiarowym, zmyślonym tworem geometrycznym — lecz trójwymiarowym strumieniem fotonów pędzących w bardzo podobnym kierunku lub trójwymiarowym zaburzeniem elektromagnetycznym. Niektóre twierdzenia takiej empirycznej teorii dają się sprawdzić doświadczalnie, np. to, że objętość bryły, którą w przybliżeniu wolno nazwać sześcianem o krawędzi a, jest w przybliżeniu równa a^3. Z drugiej strony część twierdzeń nie może być w żaden sposób sprawdzona doświadczalnie, np. twierdzenie o gęstości, głoszące, że między dowolnymi dwoma punktami na prostej jest punkt trzeci.

Tylko zdania sprawdzalne empirycznie stanowią twierdzenia teorii empirycznych, to znaczy, teoria rości pretensje tylko do prawdziwości tych zdań. Natomiast zdania niesprawdzalne pełnią jedynie funkcję pomocniczą — aczkolwiek nieodzowną. Mianowicie umożliwiają przeprowadzanie wnioskowań dedukcyjnych o empirycznie sprawdzalnych konkluzjach. Na przykład, ogólna teoria względności bywa zwykle konstruowana na zewnętrznej bazie pewnej nieeuklidesowej geometrii, a mechanika kwantowa na zewnętrznej bazie przestrzeni Hilberta. Nie przesądza to wszakże prawdziwości twierdzeń tych matematycznych teorii.

Można, co prawda, zastanawiać się, czy zdania niesprawdzalne, stanowiące zewnętrzną bazę teorii empirycznej, nie zostają w pewnym sensie potwierdzone. Przecież bowiem pozwalają na wyprowadzenie wielu empirycznie sprawdzonych zdań i rozwinięcie teorii, która okazuje się mocno potwierdzona. Ta sprawa pozostaje wielce dyskusyjna.

Nauki przyrodnicze. Pytamy na przykład, czy piasek różni się od skał. Może piach jest po prostu wielką liczbą bardzo małych kamieni. Być może, Księżyc jest po prostu wielką skałą. Być może, gdybyśmy wiedzieli, czym są skały, moglibyśmy tym samym zrozumieć, czym jest piach i Księżyc. Jakie podobieństwa łączą wiatr, kłębiący ruch powietrza, z kłębowiskiem nurtów wody, inne rodzaje ruchu? Usiłujemy stopniowo rozdzielać rzeczy niepodobne i łączyć te, które mają ze sobą cokolwiek wspólnego, choćby na pierwszy rzut oka bardzos ię od siebie różniły.

Doświadczenie w naukach przyrodniczych występuje w jednej z dwóch wersji: *obserwacja*, która jest biernym śledzeniem zdarzeń, i *eksperyment*, który polega na celowym wywołaniu interesujących badacza zdarzeń. Każde doświadczenie powinno — przynajniej w fizyce — kończyć się pomiarem, to znaczy zestawem liczb stanowiących wartość jakiegoś parametru. Rezultat obserwacji lub eksperymentu nazywa się *faktem*. Nie ma faktów gotowych, muszą one być wyodrębnione z całości zdarzeń i skonceptualizowane.

Na ustalenia faktyczne mają wpływ same teorie. Na przykład prawa rozchodzenia się i odbijania światła są badane za pomocą luster i soczewek, które są konstruowane w oparciu o pewne teorie. Podobnie konstrukcja termometru opiera się na tezie o równomiernej rozszerzalności rtęci pod wpływem ciepła. Ogólnie, dzięki teorii można skonstruować nowe przyrządy i dokonać nowych pomiarów, te zaś są punktem wyjścia nowej teorii.

Nauki humanistyczne. Podobnie, jak przyrodoznawstwo, humaniora są naukami empirycznymi. Ostatecznymi przesłankami są zdania oparte na doświadczeniu i pewne niesprawdzalne założenia. Dozwolone jest wnioskowanie dedukcyjne i indukcyjne, a celem, ku któremu zmierzają dociekania, jest wyjaśnienie ustalonych faktów. Mimo to między omawianymi typami nauk zachodzą ważne różnice.

Nauki humanistyczne dzielą się na dwie grupy: klasyczne nauki humanistyczne i nauki społeczne. Do pierwszej grupy należą: historiografia, teologia, prawoznawstwo i filologia, a do drugiej grupy należą: ekonomia, psychologia, socjologia i pedagogika. Miejsce źródeł w klasycznych naukach humanistycznych zajmują zastane teksty, które z pewnych względów odegrały lub odgrywają ważną rolę społeczną. Natomiast w naukach społecznych mamy do czynienia ze źródłami wyprodukowanymi spcejalnie na potrzeby tych nauk, najczęściej przyjmującymi postać ankiet lub raportów. Proces produkcji źródeł w naukach społecznych jest określany jako *dotwarzanie*.

Historiografia. Tworząc teorię historyczną, zwykle trzeba wykonywać trzy grupy czynności badawczych:

- heureza,
- hermeneutyka,
- synteza.

Mianem heurezy obdarzamy poszukiwanie i porządkowanie źródeł. Hermeneutyka jest to krytyka pozyskanych źródeł. Krytyka zewnętrzna zmierza do oceny pochodzenia, oryginalności i autentyczności źródła. Krytyka wewnętrzna zmierza do oceny wiarygodności źródła. Syntezą nazywamy próbę wkomponowania informacji płynących ze źródeł w całościowy obraz dziejów.

W naukach humanistycznych rozszerzamy zbiór ostatecznych przesłanek o zdania bezpośrednio oparte na dostępnych *źródłach* (*tekstach*). Każdy wytwór intencjonalnego działania może stać się *źródłem* dociekań humanistycznych (*tekstem*). Wyróżnionymi źródłami są *dokumenty*, czyli przedmioty wytworzone w celu przekazania jakiejkolwiek informacji. Typowymi dokumentami są kroniki, korespondencja, biografie, akty prawne. Źródłami mogą być też przedmioty wytworzone w innych celach, na przykład budynki, groby, narzędzia pracy, biżuteria. Poszczególne nauki humanistyczne ą charakteryzowane m.in. typami dopuszczalnych źródeł.

Zwykle trzeba odszukać i uporządkować źródła. Może to wymagać niemałego wysiłku i szczęścia. Często już na tym etapie niezbędne jest przeprowadzanie zaawansowanych wnioskowań indukcyjnych. Formułowane hipotezy dotyczą najczęściej tego, jakie źródła mogą istnieć i gdzie mogą się one znajdować.

W ramach hermeneutyki, zwanej też krytyką źródeł, dążymy do rozwiązania dwóch grup problemów: autentyczności i wiarygodności źródła. Dociekanie autentyczności nazywa się krytyką zewnętrzną, a dociekanie wiarygodności krytyką wewnętrzną. W ramach krytyki zewnętrznej poszukujemy odpowiedzi na pytanie, czy źródło jest tym, za co uchodzi. Rozważamy problem oryginalności, autorstwa, adresatów, czasu, miejsca i innych okoliczności powstania źródła. Na przykład krytyka Starego Testamentu doprowadziła badaczy do wniosku, że Mojżesz nie był autorem *Pięcioksięgu Mojżesza*, że ponadto wymieniony tekst jest kompilacją kilku dzieł, pochodzących z różnych okresów. W ramach krytyki wewnętrznej próbujemy ustalić, w jakim stopniu źródło czy też autor źródła jest autorytetem. Pytamy, co mógł na dany temat wiedzieć, czy był bezinteresowny, co na ten sam temat mówią inne źródła. Na przykład Jan Długosz wyraźnie podaje, że pod Grunwaldem wojskami polskimi dowodził Zyndram z Maszkowic. Krytyka wewnętrzna prowadzi jednak do wniosku, że tak nie było.

Synteza historyczna jest próbą całościowego ujęcia pewnego fragmentu dziejów w pewnym aspekcie. Można wskazać sześć typów syntezy historycznej, to znaczy sześć sposobów systematyzacji wiedzy opartej na źródłach. Synteza może być narracyjna, pragmatyczna, genetyczna, porównawcza, typologiczna lub nomologiczna. Autor syntezy narracyjnej dąży po prostu do zestawienia i chronologicznego uszeregowania minionych zdarzeń. Celem syntezy pragmatycznej jest ponadto ustalenie motywów, jakimi kierowali się aktorzy historii, a syntezy genetycznej zależności przyczynowo-skutkowych między zdarzeniami. Synteza porównawcza jest rozbudowaną wersją syntezy narracyjnej. Dostarcza różnorodnych, diachronicznych i synchronicznych, zestawień zdarzeń. W syntezie typologicznej chodzi ponadto o doszukiwanie się typów zdarzeń przez rozważanie podobieństw i różnic między nimi, można przykładowo dociekać przebiegu typowej rewolucji, rozważając, w jakim stopniu historyczne rewolucje pod ten typ podpadają, a w jakim odeń odbiegają. Autorzy syntezy nomologicznej, przyjmując najmocniejsze niesprawdzalne założenia, dążą do uchwycenia praw rządzących historią. Na przykład marksiści głoszą, że w dziejach dochodzi nieuchronnie do konfliktów klasowych.

Prawoznawstwo, teologia i filologia. Do najważniejszych nauk humanistycznych należy prawoznawstwo i teologia. Dokładniej naukami humanistycznymi są centralne działy prawoznawstwa i teologii: dogmatyka prawa i teologia dogmatyczna. W obu tych dyscyplinach naukowych w punkcie wyjścia występują wyróżnione źródła, traktowane jako rezultat racjonalnego zachowania. W wypadku dogmatyki prawa w tej roli występują akty prawne, a w wypadku teologii dogmatycznej teksty święte określonej religii. Celem dogmatyki — zarówno w wypadku prawoznawstwa, jak teologii — jest ustalenie, co zamierza przekazać autor źródła — prawodawca, autor natchniony lub inna instancja objawiająca.

Przy tej okazji warto przeciwstawić się dość rozpowszechnionemu mitowi, jakoby teologia była w jakimś sensie mniej naukowa niż inne nauki humanistyczne. Podejrzany status teologii miałby brać się stąd, że zawiera ona dogmaty wiary, lub stąd, że wymaga aktu wiary religijnej. Jak pokazaliśmy, teologia jest typową nauką humanistyczną, bardzo podobną do prawoznawstwa. Podobnie, jak teologowi nie wolno polemizować z tekstem świętym, prawnikowi nie wolno polemizować z aktem prawnym. Jest tak dlatego, że celem w obu tych naukach jest dokładne zrozumienie tekstu, który z jakichś względów odgrywa ważną rolę społeczną, a nie zapoznanie się z marzeniami teologa lub prawnika. I w teologii, i w prawoznawstwie, znajomość i respektowanie dogmatów jest przejawem zwykłego naukowego profesjonalizmu humanisty. Nie jest też prawdą, że teologia wymaga wykonania aktu wiary religijnej. Podobnie, jak profesor prawa może być kryminalistą, teolog może być ostatnim bezbożnikiem. Moralna lub estetyczna ocena obu takich osobników jest, rzecz jasna, odrębną kwestią. Z logicznego punktu widzenia teologia jest zwykłą nauką humanistyczną. Wyjątkowość teologii może polegać na tym, że akurat ta nauka odgrywa zdumiewająco wielką rolę społeczną, wywiera na ludzkie życie olbrzymi wpływ — z pewnością znacznie większy niż fizyka, biologia i chemia razem wzięte. Dlatego poważne uniwersytety i mądre społeczeństwa prowadzą zawsze zaawansowane studia teologiczne. To, że teologia bywa niekiedy uprawiana w sposób całkiem nieprofesjonalny, i to, że zajmują się nią niekiedy ludzie niekompetentni, jest zupełnie inną sprawą.

Na gruncie filologii status źródeł uzyskują wszelkie teksty określonego kręgu cywilizacyjnego, językowego lub narodowego. Przy tym najczęściej pewien zestaw tektów zostaje wyróżniony jako *literatura*. Założenie o racjonalności występuje tu w takiej wersji, że literatur, a nawet sam język, w którym została spisana, stanowi wytwór racjonalnego zachowania nie tylko indywidualnych autorów, ale również całej społeczności danego kręgu. Toteż celem badań filologicznych jest rekonstrukcja duchowych właściwości osób tworzących badaną cywilazację czy też naród, o ile te właściwości dają się wywnioskować z kształtu literatury lub języka.

Ponieważ filologia jest zawsze zrelatywizowana do danej społeczności, w pewnym sensie można mówić o wielu filologiach: filologii polskiej, angielskiej, rozyjskiej, niemieckiej, skandynawskiej, iberyjskiej itd. Ze względu na globalną pozycję Cywilizacji Zachodniej dwiema centralnymi filologiami są: biblistyka i klasyka (filologia klasyczna). Dotyczą one odpowiednio Biblii, literatury antycznych Greków i Rzymian.

Nauki społeczne. Jak wspomnieliśmy, specyfiką nauk społecznych jest praktyka dotwarzania źródeł. Nie mniej, w skład każdej z tych nauk wchodzi cześć typowo historyczna. Szukając odpowiedzi na takie pytania, jak: jaka jest sytuacja Murzynów w Stanach Zjednoczonych w połowie XX w.?, jak przedstawia się współcześnie system kastowy w Indiach?, kto wywiera decydujący wpływ na rządy państw Unii Europejskiej?, socjolog postępuje tak samo, jak historyk.

W naukach społecznych wolno natomiast stosować jeszcze inną praktykę badawczą, nieznaną klasycznym naukom humanistycznym. Mianowicie wolno tutaj zwracać się do wybranych osób z prośbą o udzielenie odpowiedzi na pytania, które wcześniej dobrano odpowiednio do rozważanego problemu. Te pytania przyjmują zwykle postać rozbudowanych ankiet. Odpowiedzi respondentów są traktowane jako źródła, poddawane krytyce, niekiedy odrzucane przez badacza. Te, które zostaną zaakceptowane dostarczają przesłanek wnioskowania, w szczególności praktycznie nieograniczonej możliwości testowania hipotez. Szansa i obowiązek systematycznego testowania hipotez stanowi, jak wiemy, domenę nauk przyrodniczych. Pozostaje natomiast zupełnie poza zasięgiem klasycznych nauk humanistycznych.

Studia interdyscyplinarne. Niekiedy w ramach nauk huministycznych prowadzone są studia interdyscyplinarne. Są to zróżnicowane próby łączenia elementów kilku nauk humanistycznych. Czasami w ramach studiów interdyscyplinarnych występują pomocniczo pewne elementy innych typów nauk. Celem takich hybrydowych studiów jest zwykle zbadanie jakiejś specyficznej dziedziny racjonalnego zachowania ludzi. Najbardziej rozpowszechnionymi typami studiów interdyscyplinarnych są: politologia, kulturoznawstwo, nauki wojskowe i nauki o rodzinie.

Nauki filozoficzne. Nauki filozoficzne charakteryzują się brakiem ograniczeń nakładanych na akceptowane sposoby uzasadniania. Wolno więc stosować wszelkie sposoby uzasadniania twierdzeń z tym, że zastosowane uzasadnienie samo zawsze może się stać przedmiotem oceny. Wobec tego filozof jest zobowiązany do uzasadnienia wartości stosowanych przez siebie sposobów uzasadniania. Musi zachować gotowość do uzasadnienia, że zastosowane przez niego sposoby uzasadniania są odpowiednie dla rozważanej kwestii.

Ontologia (teoria bytu). Około V wieku przed Chrystusem greccy uczeni zdali sobie sprawę z tego, że prawdziwa rzeczywistość może być ukryta pod dostępnymi nam pozorami. Choć historia zapamiętała Talesa z Miletu jako pierwszego, który zapytał, co naprawdę istnieje, przyswojenie tej idei musiało być owocem wysiłku wielu umysłów.

Epistemologia (teoria poznania). Drugą najważniejszą nauką filozoficzną jest teoria poznania (epistemologia). Uprawiając epistemologię, odpowiadamy na trzy główne pytania:

- jakie powinny być dobre przekonania?,
- jakie faktycznie są nasze przekonania?,
- jak można ulepszyć nasze przekonania?

Jak widać, do istoty epistemologii należy wartościowanie przekonań — żeby zająć jakiekolwiek stanowisko w tej dziedzinie, trzeba określić idealny system przekonań, zwany *ideałem epistemicznym*. Wówczas można zbadać, jak dalece faktycznie żywione przez nas przekonania odbiegają od ideału, i zastanowić się nad perspektywami ulepszenia naszych przekonań.

Zgodnie ze stanowiskiem sceptycznym dobre są tylko przekonania pewne (niepowątpiewalne). Niestety, żadne lub prawie żadne spośród naszych przekonań takie nie są. Nie ma też sposobu na istotną poprawę tego stanu rzeczy.

Dokładniejszy namysł nad problematyką epistemologiczną pokazuje, że poznawanie jest czynnością pod pewnym względem bardzo podobną do obrotu pieniądzem, powiedzmy do gry na giełdzie. Obracając pieniądzem, możemy godzić się na większe lub mniejsze ryzyko straty. Im większe ryzyko dopuszczamy, tym więcej możemy zyskać, jeśli nam się powiedzie. Z drugiej strony, ograniczając ryzyko, możemy niemalże wyeliminować niebezpieczeństwo straty. Czeka nas wówczas zysk prawie pewny, lecz znikomy. Ten, kto w ogóle nie zagra, nigdy nic nie przegra, ale też nigdy nie wygra. Kto nie ryzykuje, ten nie pije szampana, głosi rosyjskie przysłowie. Podobnie, jak obrót pieniądzem opiera się na grze szansy na zysk i ryzyka straty, aktywność poznawcza jest grą szansy na poznanie prawdy i ryzyka błędu, fałszu. Prawda jest tu odpowiednikiem zysku, a błąd starty. Sceptyk, agnostyk i empirysta są graczami ostrożnymi. Zabezpieczają się przed ryzykiem błędu, tracąc równocześnie szansę poznaia wielu niezbędnych, przydatnych lub choćby ciekawych prawd. Na przeciwległym biegunie znajdują się gracze agresywni: katolik i muzułmanin. Obstawiają oni odważnie szansę zdobycia prawd dla życia najważniejszych, opierając się na na religijnym objawieniu, które — zgódźmy się na to — jest obarczone większym ryzykiem błędu niż czysto matematyczny dowód, ale z drugiej strony skokowo zwiększa możliwości poznawcze. W każdym razie epsitemologia nauczyła nas przynajmniej tego, że życie poznawcze rozgrywa się między szansą na zdobycie prawdy a ryzykiem popadnięcia w błędy.

6.2 Wartość wiedzy

Pajdeja. Cywilizacja zachodnia opiera się na przekonaniu, że życie człowieka jest zadaniem. Innymi słowy człowiek rodzi się *niedokończony*. Dojrzewanie człowieka nie ogranicza się przy tym do spontanicznego rozwoju biologicznego, ale wymaga również przebudzenia, a następnie wykształcenia duchowego. Trzeba nauczyć się być człowiekiem. Ten wysiłek został określony w języku greckim jako *paideia*, a w języku łacińskim jako *humanistas*. Jest to systematyczne dążenie do wejścia w posiadanie niewidzialnych dóbr, które są niezbędne dla rozwoju ludzkiej duszy w czterech głównych sferach: intelekt, wola, serce (uczuciowość) i zdolność do działania. Wykształcenie intelektu i zdobycie właściwej wiedzy jest koniecznym warunkiem osiągnięcia celu życia. Z tego powodu, od czasu greckich początków, ludzie Zachodu rozwinęli wiedzę, wynosząc ją na poziom zupełnie niedostępny innym cywilizacjom.

Zapłatą za duchowe dobra są one same. Antyczni Grecy nauczyli nas, że człowiek studiuje w tym celu, żeby stać się lepszym człowiekiem, w szczególności po to, żeby lepiej zrozumieć świat i swoje miejsce w tym świecie. Inne wielkie cywilizacje starożytne, traktując człowieka jako tryb w społecznej maszynie, roziwjały wiedzę prawie wyłącznie dla tak zwanych celów praktycznych. Wiedzy poszukiwano o tyle, o ile była przydanta dla zaspokajania materialnych potrzeb człowieka. Posługując się współczesnym słownictwem, można powiedzieć, że wszędzie, poza Grecją, nauka była dostosowana do potrzeb *rynku pracy*. Nigdzie nie dało to wyników porównywalnych z greckimi, również w dziedzinie życiowej praktyki. W Średniowieczu Kościół Katolicki wymyślił i stworzył w Średniowieczu uniwersytety, instytucjonalizując w ten sposób grecki ideał. Hans Georg Gadamer zauważył, że w XX w. uniwersytety pełnić funkcje, do których zostały powołane, przechodząc na pozycje pozagreckie, to znaczy podporządkowując zdobywanie wiedzy potrzebom materialnym, rynkowi pracy. Przewidział on, że musi to doprowadzić do wyhamowania rozwoju wiedzy, a nawet rozwoju gospodarczego. Motorem rozwoju byli bowiem młodzi ludzie, którzy przez szereg lat obracali się w świecie duchowych dóbr, nieograniczonych idei i którzy potem, pod wpływem tych idei, wykształciwszy własne dusze, byli zdolni doskonalić również świat materialny. Natomiast młodzi ludzie, celowo przygotowywani do pełnienia przewidzianych funkcji społecznych — wywodził Gadamer — będą pozbawieni greckiej siły twórczej również w odniesieniu do świata materialnego.

Bez względu na obecny — prawdopodobnie schyłkowy — stan zachodniej cywilizacji klasycznie pojmowana nauka powstała i była rozwijana po to, żeby wykształcić dusze studiujących ludzi.

Rozdział 7

Wybrane problemy kultury logicznej

7.1 Specyfika nauk prawnych

Najpierw przedstawimy krótką charakterystykę całej dziedziny prawoznawstwa (nauk prawnych), charakteryzując jego główne dyscypliny. Następnie skupimy się wyłącznie na centralnej grupie nauk prawnych — dogmatyce, która stanowi pewną logiczną osobliwość.

Nauki prawne. Obszerna i zróżnicowana dziedzina wiedzy, jaką stanowi prawoznawstwo (nauki prawne), może zostać zasadnie podzielona na trzy poddziedziny:

- dogmatyka prawa,
- teoria prawa,
- nauki pomocnicze.

Najkrócej można powiedzieć, że w dogmatyk widzi prawo z wnętrza systemu prawnego, a teoretyk spoza tego systemu. Stąd w ramach dogmatyki obowiązujące normy są niekwestionowalne.

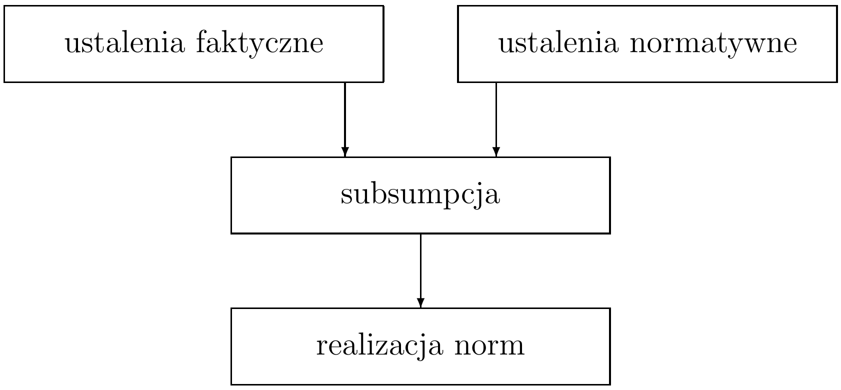
Najważniejszą i najbardziej rozbudowaną dziedzinę prawoznawstwa stanowi dogmatyka (nauki dogmatyczno-prawne). Jest to zespół typowych nauk humanistycznych, których celem jest ustalenie, jakie dokładnie normy prawne obowiązują w danym systemie prawnym, to znaczy, jak prawo normuje zachowania poszczególnych osób w poszczególnych sytuacjach. Za najważniejsze nauki dogmatyczno-prawne wypada uznać konstytucjonalistykę, która dotyczy ustaw zasadniczych, penalistykę (karnistykę), która dotyczy prawa karnego, cywilistykę, która dotyczy prawa cywilnego, kanonistykę i rubrycystykę, które dotyczą praw Kościoła Katolickiego, internacjonalistykę, która dotyczy prawa międzynarodowego, procesualistykę, która dotyczy postępowania przed organami wymiaru sprawiedliwości, administratywistykę, która dotyczy prawa administracyjnego. Nauki dogmatyczno-prawne opierają się na założeniu, że prawo stanowi jednolity wytwór doskonale racjonalnego zachowania prawodawcy. Tego założenia nigdy nie wolno uchylić, ponieważ społecznym zadaniem dogmatyki jest odkodowanie jednolitego, spójnego systemu norm z dowolnego zestawu przepisów.

Na teorię prawa (nauki teoretyczno-prawne) składają się zarówno klasyczne nauki humanistyczne, jak nauki społeczne i filozoficzne. Na gruncie tych nauk prawo nie jest traktowane jako dogmat, ale jako specyficzny wytwór kultury. Przedmiotem zainteresowania jest tutaj historia prawa, rozwój i społeczne oddziaływanie systemów prawnych w różnych okolicznościach, a także sama natura państwa i prawa.

Najważniejszymi naukami pomocniczymi prawa są: logika, psychologia, kryminalistyka, kryminologia i medycyna sądowa. Znaczną rolę odgrywa też informatyka prawnicza i socjologia.

Sylogizm prawniczy. Proces *stosowania prawa* polega na ustaleniu, jaki sposób zachowania się został w danej sytuacji przepisany przez prawo, i na zachowaniu się w przepisany sposób. Logiczny model procesu stosowania prawa określamy mianem *sylogizmu prawniczego*. Na sylogizm prawniczy składają się *ustalenia faktyczne*, *ustalenia normatywne*, *subsumpcja* ustaleń faktycznych i normatywnych, a ponadto *realizacja norm* (tablica 7.1). Ustalenia faktyczne powinny prowadzić do poznania aktualnego stanu rzeczy w jego prawnych aspektach, a ustalenia normatywne do poznania stanu rzeczy postulowanego przez prawodawcę. Ustalenie relacji między tymi stanami rzeczy nazywane jest subsumpcją ustaleń faktycznych i normatywnych (krótko: subsumpcją). Ustalenia faktyczne i normatywne oraz subsumpcja składają się na pierwszą część procesu stosowania prawa. Ta część ma charakter poznawczy i wymaga zwykle przeprowadzenia szeregu — nieraz skomplikowanych — wnioskowań. Realizacja norm stanowi drugą, wolitywną część procesu stosowania prawa. Sprowadza się ona do zachowania się w sposób postulowany przez prawo. W gruncie rzeczy nie stanowi ona już zadania samej dogmatyki prawa, aczkolwiek charakterystyka sposobu realizacji norm może wchodzić w zakres tego zadania.

Ustalenia faktyczne. W ramach ustaleń faktycznych należy wyodrębnić z aktualnego stanu rzeczy te fakty, które są istotne dla danej sprawy, skon-



Tablica 7.1: Sylogizm prawniczy

ceptualizować je i opisać w języku prawnym. Należy również uznać, które z tych faktów zachodzą i jakie są istotne dla sprawy okoliczności zajścia tych faktów. Tak zrekonstruowane fakty nazywają się *faktami sprawy.*

Ustalenie niektórych faktów sprawy zawiera moment wartościowania. O takich faktach mówimy, że są wyróżnione *oceniająco*. O faktach, których ustalenie nie zawiera momentu wartościowania, mówimy, że są wyróżnione (tylko) *opisowo*. Moment wartościowania w ustalaniu faktów może polegać na *ustosunkowaniu* się do stanu rzeczy lub na *oszacowaniu* jakiejś wielkości. Przykładem ustosunkowania się do stanu rzeczy jest odpowiedź na pytanie, czy oskarżony miał złą wolę, a przykładem szacowania jest odpowiedź na pytanie, czy wyrządzona szkoda jest znaczna, lub na pytanie, czy społeczna szkodliwość popełnionego czynu jest niska.

Wnioskowania, które są przeprowadzane w ramach ustaleń faktycznych, należą przeważnie do zwykłych wnioskowań i mogą być oceniane z punktu widzenia logiki ogólnej. Bywa tak nawet wówczas, gdy wnioskowaniom tym nadano specjalne prawnicze nazwy. Na przykład *alibi* jest to wnioskowanie o schemacie:

nie można być równocześnie w miejscach: m i n,
do zdarzenia z doszło w czasie t i w miejscu m,
w czasie t osoba a przebywała w miejscu n,

---

osoba a nie uczestniczyła w zdarzeniu z.

Jest to zwykłe wnioskowanie dedukcyjne, o czym można się łatwo przekonać, analizując jego schemat w ramach klasycznego rachunku logicznego. Egzemplifikującym ten schemat wnioskowaniom nadano specjalną nazwę, ze względu na doniosłą rolę i częstość występowania takich wnioskowań w ramach ustaleń faktycznych.

Ustalanie faktów przebiega przeważnie według zwykłych metod badawczych. Na tym etapie praca prawnika jest podobna do pracy historyka. Prawnik dąży jednak, jak wspomniano, do opisania istotnych faktów w języku prawnym. Ponadto w naukach prawnych stosowane są pewne osobliwe metody wnioskowania: *domniemanie prawne* i *rozumowanie poszlakowe*.

Domniemanie prawne (presumpcja). Domniemanie prawne (presumpcja) jest to ustanowiony przez prawo i obowiązujący w ramach ustaleń faktycznych nakaz uznawania określonych wnioskowań za wnioskowania niezawodne. Będące przedmiotem takiego nakazu wnioskowania mogą być z punktu widzenia logiki zawodne, a nawet całkiem niekonkluzywne, obarczone błędem *ignoratio elenchii*. Czerpią one bowiem swoją moc uzasadniania nie z logiki, lecz z woli prawodawcy. Z tego względu owa moc nie sięga poza proces stosowania prawa. Zauważmy, że domniemania prawne są normami prawnymi. Zatem stanowią one akt ingerencji ustaleń normatywnych w ustalenia faktyczne.

Z logicznego punktu widzenia należy starannie odróżniać dwa rodzaje domniemania prawnego:

- domniemanie usuwalne (*praesumptio iuris tantum*),
- domniemanie nieusuwalne (*praesumptio iuris ac de iure*).

Domniemanie usuwalne bywa też określane jako względne, warunkowe, proste lub wzruszalne, a domniemanie nieusuwalne jako bezwzględne, bezwarunkowe, niezbite lub niewzruszalne. Ustalenia faktyczne, które nie opierają się na domniemaniach, lecz wyłącznie na zwykłej logice, określamy jako ustalenia *czysto faktyczne*. Domniemanie nieusuwalne jest to bezwzględny nakaz uznania określonego wnioskowania za niezawodne. Nakaz ten obowiązuje także wtedy, gdy konkluzja odnośnego wnioskowania stoi w sprzeczności z ustaleniami czysto faktycznymi. Domniemanie usuwalne jest to nakaz uznania określonego wnioskowania wnioskowania za niezawodne pod takim warunkiem koniecznym i wystarczającym, że konkluzja tego wnioskowania nie stoi w sprzeczności z ustaleniami czysto faktycznymi lub opartymi na domniemaniach nieusuwalnych. Innymi słowy, negacja konkluzji nie może wynikać z tych ustaleń. Jak widać, w razie sprzeczności w ramach ustaleń faktycznych obowiązuje następująca hierarchia: domniemania nieusuwalne mają najwyższą rangę, ustalenia czysto faktyczne rangę pośrednią, a domniemania usuwalne najniższą. Ustalenia wyższej rangi są rozstrzygające.

Przykładem domniemania usuwalnego jest domniemanie ojcostwa, uregulowane w *Kodeksie rodzinnym i opiekuńczym* z 25 lutego 1964 r. (art. 62 §1). Zgodnie z tym przepisem wnioskowanie:

mężczyzna a był mężem kobiety b w chwili narodzin dziecka c,
kobieta b jest matką dziecka c,

---

mężczyzna a jest ojcem dziecka c

należy traktować jako niezawodne wtedy i tylko wtedy, gdy wniosek nie jest sprzeczny z ustaleniami wyższej rangi. Jeśli więc z ustaleń czysto faktycznych — na przykład z wyników badań materiału genetycznego — wynika, że mężczyzna a nie jest ojcem dziecka c, domniemania nie ma.

Przykładem domniemania nieusuwalnego jest artykuł 9 ustawy *Prawo czekowe* z 28 kwietnia 1936 r. Jeśli na czeku widnieją dwie kwoty, z których jedną zapisano słownie, a drugą cyframi, to zgodnie z tym przepisem należy wnioskować, że czek opiewa na kwotę zapisaną słownie. Zatem wnioskowanie:

na czeku c widnieje kwota a, zapisana cyframi,
na czeku c widnieje kwota b, zapisana słownie,
na czeku c nie widnieją inne kwoty,

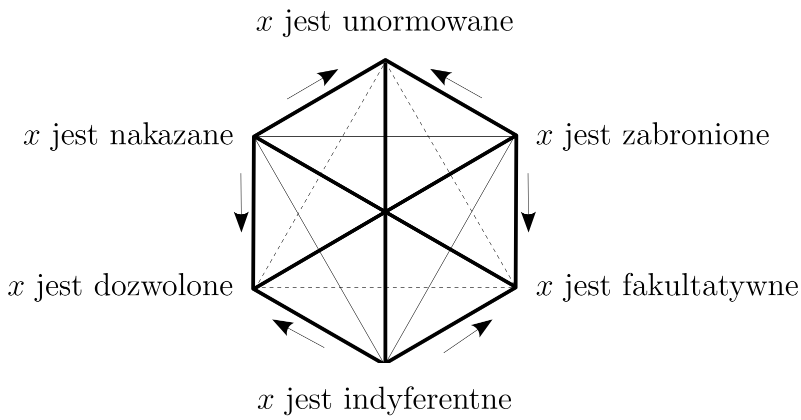
---

czek c opiewa na kwotę b

ma być bezwarunkowo traktowane jako niezawodne. Bezwarunkowość polega na tym, że prawdziwość przesłanek przesądza o prawdziwości konkluzji bezwzględnie nawet wtedy, gdy z ustaleń czysto faktycznych wynika coś przeciwnego. Zatem nawet, gdyby wystawca czeku zeznał pod przysięgą i na własną niekorzyść, że jest inaczej, należy ustalić, że czek opiewa na sumę zapisaną słownie.

Między dwoma rodzajami domniemania zachodzi głęboka różnica logiczna. Domniemanie usuwalne może znaleźć zastosowanie tylko wtedy, gdy ani zdania $\mathcal{A}$, ani jego negacja $\ulcorner\neg\mathcal{A}\urcorner$, nie ma uzasadnienia. Wówczas domniemanie usuwalne może przechylić szalę na jedną ze stron, przerzucając na drugą stronę *ciężar dowodu* (*onus probandi*). W ten sposób domniemanie prawne faworyzuje pewne wartości lub bierze w obronę pewne osoby. W momencie, gdy pojawi się uzasadnienie dla któregoś z rozważanych zdań, domniemanie usuwalne ustępuje przed zwykłą logiką. Celem domniemania usuwalnego jest bowiem uzupełnienie logiki. Takie domniemanie zawsze jest ze zwykłą logiką komplementarne. Osoba, która stosuje domniemanie usuwalne, rozumuje logicznie, *a ponadto* stosuje pewne dodatkowe reguły wnioskowania. Natomiast domniemanie nieusuwalne może godzić w zwykłą logikę, może wymagać wnioskowania *wbrew* logice. Jest to bardzo mocne narzędzie. Nic więc dziwnego, że prawodawcy stosują je bardzo rzadko, wyłącznie dla ochrony najważniejszych wartości.

Ustalenia normatywne. Celem ustaleń normatywnych jest określenie sposobu zachowania postulowanego w danej sytuacji przez prawodawcę. W pierwszym rzędzie należy wybrać właściwe dla danej sytuacji przepisy. Jeśli danej sytuacji dotyczy tylko jeden przepis, kwestia wyboru ma charakter czysto merytoryczny. Jeśli do wyboru jest więcej przepsiów, zasady wyboru przepisu właściwego są określone w samym prawie, a więc są regulowane osobnym przepisem. Jeśli, na przykład, jakiś czyn wyczerpuje znamiona kilku przestępstw, wielu prawodawców każe dopatrywać się tego, które jest zagrożone najwyższą karą. Następnie — zgodnie z regułami sztuki prawniczej — należy upewnić się o mocy obowiązującej tych przepisów. W ten sposób uzyskuje się zestaw istotnych dla ustalonych faktów wypowiedzi prawodawcy. Następnia należy odkodować obowiązującą normę, wyrażoną we właściwych wypowiedziach prawodawcy.



Tablica 7.2: Heksagon norm

Subsumpcja i realizacja normy. Rezultatem ustaleń faktycznych jest opis pewnej sytuacji. Rezultatem zaś ustaleń normatywnych jest charakterystyka postulowanego wzorca zachowania. Przez subsumpcję ustaleń faktycznych i normatywnych rozumiemy porównanie opisanego stanu faktycznego z postulowanym wzorcem, prowadzące do udzielenia odpowiedzi na pytanie, w jakim stopniu stan faktyczny jest egzemplifikacją tego wzorca.

Relacja zachodząca między ustaleniami faktycznymi a normatywnymi może być określona tak dokładnie, że subsumpcja ma charakter czysto dedukcyjny. Często jednak osobie przeprowadzającej subsumpcję pozostaje margines swobody lub też niepewności. Mamy wówczas do czynienia z *luzem* w stosowaniu prawa. Luz w stosowaniu prawa może być zamierzony przez prawodawcę lub nie. Niezamierzone luzy powstają najczęściej w rezultacie niedoskonałości ustaleń faktycznych (braki dowodów) lub w rezultacie logicznej niedoskonałości prawa. Luzy zamierzone powstają, gdy prawodawca pozostawia pewien zakres swobody oceny osobie przeprowadzającej subsumpcję.

W rezultacie subsumpcji powinno się okazać, jakie zachowanie określonego podmiotu jest postulowane przez prawo. Podmiot, który zachowuje się w postulowany sposób, realizuje prawo, a podmiot, który w ten sposób się nie zachowuje, przekracza prawo.

Z subsumpcją związany jest wybór przez osobę stosującą prawo określonego zachowania Stosowanie prawa może prowadzić do następujących typów zachowania:

- wiążącego ustalenia praw lub obowiązków podmiotów prawa,
- wiążącego ustalenia stanu prawnego,
- wykorzystania kompetencji do działania,
- wykonania uprawnienia,
- spełnienia obowiązku.

W dwóch pierwszych wypadkach rezultatem zastosowania prawa jest wydanie przez kompetentny organ władzy określonej decyzji, np. wyroku sądowego lub decyzji administracyjnej. Przykładem wykorzystania kompetencji jest egzekucja komornicza lub wykonanie wyroku przez osadzenie skazanego w zakładzie karnym. Przykładem wykonania uprawnienia jest wstąpienie w związek małżeński, a przykładem spełnienia obowiązku jest zapłacenie należnego podatku. W dawniejszych opracowaniach pojęcie stosowania prawa ograniczano nieraz do takiej aktywności, która zmierza do wydania decyzji przez kometentny organ władzy (dwa pierwsze punkty).

Sposób zachowania może być w pełni zdeterminowany przez subsumpcję. Kiedy indziej osoba stosująca prawo może zachować pewną swobodę wyboru sposobu zachowania — swobodę decyzji — w granicach zakreślonych przez prawo.

Wykładnia. Odkodowanie normy prawnej zawartej w przepisach nosi miano *wykładni* (*egzegezy*) prawa. Na reguły wykładni składają się

- dyrektywy interpretacyjne,
- reguły kolizyjne,
- reguły wnioskowań prawniczych.

Dyrektywy interpretacyjne bywają określane jako wykładnia w sensie wąskim, w przeciwieństwie do wykładni w sensie szerokim, obejmującej wszystkie wymieniony grupy reguł egzegetycznych. Z tego powodu dyrektywy interpretacyjne są też często nazywane dyrektywami wykładni.

Ze względu na sposób interpretownia tekstu dyrektywy interpretacyjne dzielą się na *językowe*, *systemowe* i *funkcjonalne*. Dyrektywy językowe określają obowiązujący sposób posługiwania się językiem prawnym, w szczególności sposób rozumienia jego symboli. Dyrektywy systemowe opierają się na założeniu o uporządkowaniu obowiązujących norm prawnych oraz o niesprzeczności i pełności prawa. Każą one traktować interpretowaną normę jako element całości korpusu praw, uwzględniać w interpretacji ową całość i miejsce zajmowane w niej przez stanowiące przedmiot wykładni przepisy. Dyrektywy funkcjonalne uwzględniają pozaprawne okoliczności, które mogą wpływać na znaczenie przepisów prawnych. Krótko mówiąc, dyrektywy językowe uwzględniają tekst interpretowanych przepisów, dyrektywy systemowe uwzględniają ponadto tekst wszelkich innych obowiązujących przepisów, a dyrektywy funkcjonalne okoliczności spoza systemu prawa.

Przykładem dyrektywy językowej jest dyrektywa zabraniająca pomijania jakichkolwiek znaków występujących w akcie prawnym. Opiera się ona na założeniu, że żadne symbole umieszczone w tekście aktu prawnego nie są zbędne, każdy z nich został użyty w jakimś celu. Innym przykładem jest syrektywa nakazująca rozumieć używane w tekście prawnym zwroty w ich sensie potocznym, o ile za czymś przeciwnym nie przemawiają dostateczne racje. Zgodnie z jeszcze inną dyrektywą językową użycie w tekście dwóch różnych — nawet potocznie synonimicznych — terminów każe dopatrywać się dwóch różnych znaczeń, podczas gdy użycie jednego terminu każde dopatrywać się za nim jednego znaczenia.

Dyrektywy systemowe zabraniają w pierwszym rzędzie takiej interpretacji, przy której obowiązywałyby normy wzajemnie niezgodne. Ponadto dyrektywy te preferują takie interpretacje, w których prawo nie zawiera luk. Trzecia grupa dyrektyw systemowych każde uwzględniać w interpretacji usytuowanie przepisu, np. tytuł rozdziału, w którym przepis umieszczono.

Dyrektywy funkcjonalne każą m.in. uwzględniać cele, jakie ma realizować przepis prawny (wykładnia teleologiczna) i jakie przyświecały prawodawcy przy ustanawianiu przepisu, przebieg prac nad przygotowaniem przepisu itp. (wykładnia genetyczna), a także żywione w danej społeczności przekonania moralne i obyczajowe i dające się przewidywać skutki obowiązywania przepisu.

Użyciem dyrektyw interpretacyjnych oraz innych zasad wkładni żądzą osobne reguły, zwane niekiedy dyrektywami wykładni *drugiego stopnia*. Zgodnie z jedną z takich dyrektyw pierwszeństwo w stosowaniu przysługuje dyrektywom językowym, do dyrektyw systemowych odwołujemy się tylko wtedy, gdy te pierwsze okazują się niewystarczające, a do dyrektyw funkcjonalnych należy dwoływać się tylko, jeśli zawiodą dyrektywy obu poprzednich grup.

wykładnia literalna (dosłowna), zawężająca, rozszerzająca. np normy karne nie wolno rozszerzająca w KPK.

Reguły kolizyjne. niezgodność logiczna, instrumentalna, prakseologiczna.

- reguła hierarchiczna: *lex superior derogat legi inferiori*,
- reguła chronologiczna: *lex posterior derogat legi priori*,
- reguła merytoryczna: *lex specialis derogat legi generali.*

W razie kolizji między dyrektywami kolizyjnymi dyrektywy drugiego stopnia przyznają pierwszeństwo regule hierarchicznej, drugie miejsce regule merytorycznej, a trzecie regule chronologicznej. W razie kolizji należy zastosować tę regułę, która ma przewagę. Jeśli, przykładowo, przepis, który wydano rok temu, nakazuje wszystkim obywatelom płacić składkę zdrowotną, a inny przepis, który wydano przed dziesięciu laty, zwalnia studentów z płacenia składki zdrowotnej, to wedle reguły chronologicznej studenci mają obowiązek płacenia tej składki, a wedle reguły merytorycznej nie mają. W takim razie, wobec przewagi reguły merytorycznej nad chronologiczną, studenci nie mają obowiązku płacenia składki zdrowotnej.

Reguły wnioskowania prawniczego. Oprócz norm, które zakodowano w przepisach, do systemu prawa należą normy, których uznania domagają się reguły wnioskowania prawniczego. Reguły te stwierdzają — niekiedy pod pewnymi dodatkowymi warunkami — obowiązywanie norm, które pozostają w określonych relacjach do norm już uznanych za obowiązujące. Normy, które uznano za obowiązujące na mocy reguł wnioskowania prawniczego, mają tę samą moc obowiązującą, co normy zakodowane bezpośrednio w tekstach prawnych. Do najważniejszych reguł wnioskowania prawniczego zaliczamy

- reguła analityczna,
- reguły instrumentalne,
- *argumentum a fortiori*,
- *argumentum a simili* (*per analogiam*),
- *argumentum a contrario* (*a silentio*).

Należą one do powszechnej logicznej kultury prawnika i zostaną obecnie omówione w szczegółach. Prawodawca może niekiedy ograniczyć zakres obowiązywania pewnych reguł wnioskowania prawniczego lub ustanowić dodatkowe reguły.

Reguły instrumentalne. Regułami instrumentalnymi są: *dyrektywa instrumentalnego nakazu* oraz *dyrektywa instrumentalnego zakazu*. Jeżeli obowiązuje norma n, a wykonanie czynu c jest koniecznym warunkiem realizacji normy n, to na mocy dyrektywy instrumentalnego nakazu obowiązuje również norma n', która nakazuje wykonanie czynu c. Jeżeli z kolei obowiązuje norma n, a wykonanie czynu c uniemożliwia realizację normy n, to na mocy dyrektywy instrumentalnego zakazu obowiązuje również norma n', która zabrania wykonania czynu c. W obu wypadkach mówimy, że norma n' *wynika instrumentalnie* z normy n. Reguły instrumentalne opierją się m.in. na wiedzy o związkach przyczynowo-skutkowych, zachodzących między różnymi zachowaniami. Wynikanie instrumentalne zachodzi więc pod tym warunkiem, że trafnie oceniono odnośne związki przyczynowo-skutkowe.

Weźmy dla przykładu pod uwagę przepis, który zobowiązuje mnie do złożenia rocznego zeznania podatkowego w określonym terminie i we właściwym urzędzie skarbowym. Wypełnienie nałożonego przez ten przepis obowiązku nie byłoby możliwe, jeśliby właściwy urząd skarbowy nie przyjął ode mnie zeznania podatkowego. Wobec tego — nawet jeśli przepsiy na ten temat milczą — z nakazu złożenia przez obywatela zeznania podatkowego instrumentalnie wynika nakaz przyjęcia tego zeznania przez właściwy urząd, zakaz zamknięcia tego urzędu itp.

Konsekwencja aksjologiczna. Wśród niesprawdzalnych założeń dogmatyki prawa istotną rolę odgrywa założenie o aksjologicznej konsekwencji prawodawcy. To założenie składa się z dwóch tez. Po pierwsze teksty prawne są wytworami racjonalnego zachowania prawodawcy. Po drugie system ocen i wartości, jakimi kieruje się prawodawca, jest stabilny i logicznie spójny. W oparciu o to założenie można — w drodze indukcji humanistycznej — dociekać aksjologii, która leży u podstaw danego systemu prawnego. Na przykład stąd, że prawodawca karze zabójstwo, wolno w drodze indukcji humanistycznej wnioskować, że ludzkie życie przedstawia dla tego prawodawcy pozytywną wartość. O niektórych wyborach aksjologicznych prawodawca może wyraźnie poinformować w tekstach prawnych, najczęściej w konstytucji lub innych aktach podstawowych. Takie wybory aksjologiczne należy zawsze obowiązkowo przypisywać prawodawcy.

Warto przy okazji zauważyć, że pojęcie prawodawcy *światopoglądowo neutralnego* jest absurdalne. Każdy, kto stanowi prawo, kieruje się w mniej lub bardziej świadomy sposób pewnym systemem wartości, a więc dokonuje wyborów światopoglądowych. Na przykład prawodawca polski na przełomie XX i XXI wieku zabraniał palenia papierosów w kawiarni i picia alkoholu na parkowej ławce, ale nie zabraniał zdrady małżeńskiej, choć w procesie rozwodowym nieco faworyzował stronę zdradzoną. Nie można wykluczyć, że osoby faktycznie stanowiące prawo, zachowują się często bezmyślnie. Mimo to prawnik-dogmatyk musi dociekać systemu wartości, który kazałby konsekwentnemu prawodawcy podjąć takie właśnie decyzje. Prawnik mógłby stąd wywnioskować indukcyjnie co najmniej tyle, że palenie papierosów w kawiarni lub picie piwa w parku są wedle światopoglądu polskiego prawodawcy większym złem niż rozbijanie małżeństwa, że zdaniem owego prawodawcy są bardziej szkodliwe społecznie. światopogląd prawodawcy może być przemyślany lub naiwny, racjonalny lub idiotyczny, ale z pewnością jakiś światopogląd musi zostać prawodawcy przypisany.

Założenie o aksjologicznej konsekwencji prawodawcy odgrywa istotną rolę w ustaleniach normatywnych. Albowiem akty prawne, stanowiąc wytwór ograniczonego w swej mocy ducha ludzkiego, nigdy nie przewidują wszystkich możliwych sytuacji. W określonych sytuacjach normy, które nigdy nie zostały przez prawodawcę sformułowane, obowiązują na równi z wyraźnie sformułowanymi normami na tej podstawie, że opierają się na tym samym systemie wartości. Zadaniem prawnika-dogmatyka jest dociekanie systemu wartości, którymi kieruje się prawodawca, a następnie domyślanie się norm, które taki prawodawca musiałby sformułować, gdyby był zdolny do przewidzenia i ujęcia wszystkich możliwych sytuacji, gdyby miał jakieś boskie zdolności intelektualne.

Prawodawca sam może określić, w których dziedzinach należy stosować założenie o jego konsekwencji aksjologicznej i w których dziedzinach za obowiązujące należy uznawać wyłącznie normy wyraźnie sformułowane. Może też określić zakres dozwolonych wnioskowań opartych na konsekwencji aksjologicznej. Na przykład prawodawca kościelny nakazuje stosowanie założenia o aksjologicznej konsekwencji we wszystkich dziedzinach z wyjątkiem ustaw karnych (*Kodeks prawa kanonicznego*, kanon 18 i 19). Znaczy to, że normy ustanawiające kary obowiązują w tym systemie prawnym tylko wówczas, gdy zostały wyraźnie sformułowane. Jeśli w takim systemie prawnym wydano by przepis: „zabrania się deptania trawników", to prawnik wywnioskowałby stąd indukcyjnie, że prawodawca chce chronić zieleń. Stąd zaś wywnioskowałby, że prawodawca zabrania jeżdżenia po trawniku rowerem nawet, jeśli taki przepis nie zostałby sformułowany. Jeśli jednak sformułowano by przepis: „kto depcze trawnik ma być ukarany mandatem", prawnik wnioskowałby indukcyjnie, że prawodawca chce chronić zieleń, że zabrania jeżdżenia po trawie rowerem, ale nie mógłby wnioskować, że za jazdę rowerem po trawie grozi mandat.

Najważniejszymi i najbardziej rozpowszechnionymi typami reguł, które czerpią swą moc z założenia o aksjologicznej konsekwencji prawodawcy, są *argumenta*: *a fortiori*, *a simili* oraz *a contrario.*

Argumentum a fortiori. Reguły wnioskowań prawniczych określane jako *argumenta a fortioti* opierają się na założeniu o aksjologicznej konsekwencji prawodawcy, czyli na założeniu o konsekwencji systemu ocen, którymi kieruje się on, stanowiąc prawo. Ponadto w grę wchodzi założenie o możliwości porównywania stopnia realizacji lub pogwałcenia wartości przez różne sposoby zachowania się. Załóżmy więc, że czyny: c i c' godzą w tę samą wartość, uznawaną przez prawodawcę, ale czyn c godzi w nią w mniejszym stopniu niż czyn c'. W takim razie, jeśli dozwolony jest czyn c', to — na mocy reguły *a maiori ad minus* — tym bardziej dozwolony jest czyn c. Jeśli natomiast czyn c jest zakazany, to — na mocy reguły *a minori ad maius* tym bardziej zakazany jest czyn c'.

Jeśli, na przykład, działając w obronie koniecznej, wolno pozbawić napastnika życia, to tym bardziej wolno w tej sytuacji ciężko uszkodzić jego ciało. Albowiem ciężkie uszkodzenie ciała i pozbawienie życia godzą w tę samą wartość: ochronę życia ludzkiego, ale pierwszy z rozważanych czynów godzi w nią w mniejszym stopniu niż drugi. Jeśli natomiast zakazano fotografować człowieka bez jego zgody, to tym bardziej zakazane jest publikowanie takiej fotografii. Obydwa czyny godzą bowiem w tę samą wartość: ochronę prywatności, ale drugi godzi w nią w większym stopniu niż pierwszy.

Argumentum a simili. Reguły wnioskowania, nad którymi obecnie się pochylamy, są określane jako *argumenta a simili*, *argumenta per analogiam* lub też jako *analogia prawna*. Opierają się one na założeniu o aksjologicznej konsekwencji prawodawcy. Do tej kategorii należą dwie reguły wnioskowania prawniczego: *analogia legis* i *analogia iuris*. Reguła *analogia legis* zaleca następujący sposób wnioskowania. Jeśli czyn c jest w określony sposób unormowany, a czyn c' jest podobny do czyny c w dostatecznym stopniu i pod istotnymi względami, to należy uznać czyn c' za unormowany w taki sam sposób, jak czyn c. Reguła *analogia iuris* zaleca następujący sposób wnioskowania. Jeśli obowiązuje norma n, która opiera się na ocenie o, to należy uznać za obowiązującą również normę n', która opiera się na tej samej ocenie o, nawet jeśli norma n' nie została sformułowana w tekście prawnym.

Stosowanie reguł wnioskowania *a simili* jest w wysokim stopniu zawodne. Z drugiej strony reguły te są podstawą wielu ważnych decyzji. Na przykład pod koniec XIX w., w początkach elektryczności, pojawiła się praktyka nielegalnego odprowadzania prądu elektrycznego. Ponieważ kodeksy nie wymieniały jeszcze takiego przestępstwa, nie było jasne, czy wolno za nie karać. Trybunały francuskie — kierując się regułą *analogia legis* — uznały wówczas karalność nielegalnego odprowadzania prądu ze względu na podobieństwo tego czynu do karalnych aktów kradzieży. Natomiast najwyższy sąd niemiecki wykluczył w omawianym wypadku karalność, uznając podobieństwo za nieistotne. Niemiecki wymiar sprawiedliwości powołał się przy tym na fakt, że przepsi karny mówi o przywłaszczeniu sobie *rzeczy* (niem. *Sache*), podczas gdy prąd elektryczny nie jest rzeczą, lecz siłą (niem. *Kraft*). Rok później znowelizowano niemiecki kodeks karny, bezpośrednio penalizując nielegalne odprowadzanie prądu. Ponieważ system prawa nie może zadowalająco funkcjonować bez analogii prawnej, stosując jej reguły, należy zachować nadzwyczajną czujność logiczną i dokładnie dyskutować każdy przypadek.

Dyskutując wartość wnioskowania *analogia legis*, musimy poddać ocenie stopień podobieństwa dyskutowanych czynów oraz istotność owego podobieństwa dla rozważanego sposobu normowania. Jeśli podobieństwo, które stanowi podstawę wnioskowania przez analogię, nie jest istotne dla danego wnioskowania, to zarzucamy błąd *płytkiej analogii*, a jeśli to podobieństwo jest za słabe, to zarzucamy błąd *skali*. W skrajnym przypadku błędu płytkiej analogii mamy do czynienia właściwie z brakiem realnego podobieństwa, z podobieństwem pozornym, opartym wyłącznie na figurach retorycznych. Nie mamy wówczas do czynienia z analogią, lecz z metaforą, i zarzucamy błąd *myślenia metaforycznego*. W zaprezentowanym przykładzie nielegalnego odprowadzania prądu sąd niemiecki uznał rozróżnienie na rzecz i siłę za istotne, a sąd francuski za nieistotne dla podobieństwa do karalnych przypadków kradzieży.

Argumentum a contrario. Reguła, którą określamy jako *argumentub a contrario* lub jako *argumentum a silentio*, nakazuje następujący sposób wnioskowania. Jeśli prawodawca unormował czyn c w określonych sytuacjach, to należy wnioskować, że w pozostałych sytuacjach czyn c jest unormowany w skrajnie przeciwny sposób. Na przykład polski kodeks cywilny stwierdza, że właściciel pola może zatrzymać cudze zwierzę, które weszło w szkodę, jeśli jest to niezbędne dla przyszłego postępowania dowodowego. Należy stąd wnioskować — choć wcale to nie wynika — że w sytuacji, w której można dojść swoich praw na właścicielu pechowego zwierzęcia w inny sposób, nie wolno go aresztować. Kto by takie zwierze zatrzymał, może być nawet oskarżony o kradzież.

Stosowanie reguły *a contrario* wymaga upewnienia się, że prawodawca faktycznie milczy na temat rozważanej sytuacji. Być może bowiem, w innym przepisie prawodawca zezwolił na zatrzymanie zwierzęcia pod innymi jeszcze warunkami. Wnioskować *a contrario* wolno tylko wówczas, gdy nie zachodzi żadna z przewidzianych przez prawodawcę sytuacji.

7.2 Elementy teorii komunikacji

Komunikacja językowa.

Sugestia (stwierdzanie a sugerowanie). Perswazja językowa — wykorzystanie skojarzeń emocjonalnych związanych z określonymi zwrotami. Zwroty mogą być *emocjonalnie neutralne* lub *emocjonalnie aktywne*.

Implikatura konwersacyjna. Komunikacja jest działaniem racjonalnym (celowym, umyślnym). Przekazujemy tyle informacji, ile potrzeba, wszelkie istotne dla tematu rozmowy informacje i tylko takie. Zaburzenie konwersacji świadczy o nieporozumieniu lub o wystąpieniu implikatury, to znaczy osobliwego sensu aluzyjnego (Paul Grice).

czy Edward jest dobrym prawnikiem? Ma bardzo ładny charakter pisma. Chciałbym dostać piątkę z logiki. A ja chciałbym być księciem Monako.

Wybiórczość. 5.11.2011 r. Studium Praktycznej Nauki Języków Obcych KUL zorganizowało Dzień Kultury Chińskiej. Główne wydanie ogólnopolskiego dziennika telewizyjnego. Pokaz Taiji, Wing Tsun, recital piosenki chińskiej, legendy chińskie i wspomnienia wybranych osób z pobytu w Chinach. Można też było wysłuchać wykładu o przyjemności płynącej z używania języka chińskiego. Całość zakończyła się występem studentów lektoratu języka chińskiego pt. *Chiny — gorąco polecamy.*

Informacja tendencyjna. Można wpływać na zachowanie odbiorcy komunikatu, przekazując mu tendencyjną informację o jakimś zdarzeniu. Odróżniamy dwa główne typy tendencyjnych informacji:

- zakażenie (intoksykacja),
- zacieranie.

Zakażeniem określamy umiejętne posługiwanie się kłamstwem tak, by w umyśle odbiorcy upodobniło się do prawdy. Zacieranie jest to manipulacja prawdą.

Dżentelmeni, jak głosi przysłowie, nie dyskutują o faktach. Oni przyjmują fakty do wiadomości. Stosując *bajkę* staramy się wywołać wśród dżentelmenów spór o fakty. Zamiast informacji prawdziwej podajemy do wiadomości fałsz. Ważne jest tylko to, żeby był to fałsz niesprawdzalny lub przynajmniej trudny do sprawdzenia. Chodzi o to, żeby odbiorca nie miał szans na sprawdzenie stanu faktycznego lub co najwyżej miał na to znikome szanse. Zamiast poczucia pewności, bezradny odbiorca dysponuje sprzecznymi sprawozdaniami. Znajduje się w sytuacji określanej jako *słowo przeciw słowu.*

Chcąs zasugerować pewną myśl, możemy o nią zapytać lub wręcz jej zaprzeczyć. Mamy wówczas do czynienia z emphinsynuacją (*podpowiedzią*). Jeśli chcemy zasugerować, że Kowalski zdradza żonę, możemy rozpowiadać jakoby się o tym mówiło, dodając, że sami w to nie wierzymy. Skuteczność tego procederu przedstawiła Agatha Christie w książce *Dwanaście prac Herkulesa*.

Jeśli fałsz podano do wiadomości wespół z prawdą, mamy do czynienia z *mikserem*. Odbiorca dysponuje trudną do rozwikłania plątaniną prawdy i fałszu, niczym Kopciuszek, któremu kazano oddzielać groch od popiołu, lub niczym człowiek, któremu zapłacono zepsutą monetą. Prawdziwa i weryfikowalna informacja służy w tym wypadku jako przewodnik pozwalający na wprowadzenie kłamstwa.

O *deformacji* prawdy mówimy, gdy prawdziwa informacja została podzielona na części, z których niektóre zostały przekazane wiernie, inne zaś podważone.

Istotą *opakowania* jest modyfikacja kontekstu przekazywanej wiadomości.

Zacieranie

Przykrycie — podajemy mnóstwo nieistotnych faktów. Wybór — podajemy tylko niektóre fakty. Komentarz podtrzymywany — odwrócenie uwagi przez przeniesienie akcentu — ilustracja generalizacja

(Volkoff, s. 80n) intoksykacja (zakażenie): bajka (nieweryfikowalny fałsz), mikser (mieszanka prawdy i fałszu), deformacja (prawdy), modyfikacja kontekstu (opakowanie), zacieranie: wybiórczość, komentarz podtrzymywany, ilustracja, generalizacja, głosowanie (nierówne części), reprezentacja (równe części)

Definicje perswazyjne. Celem definicji perswazyjnych jest zmiana nasilenia, rodzaju lub biegunu ładunku emocjonalnego związanego z danym zwrotem lub też przeniesienie tegoż ładunku na inny zwrot. Celem definicji perswazyjnych może być

- zmiana zakresu definiowanego terminu,
- zmiana skojarzeń związanych z definiowanym terminem,
- wymiana jednego terminu na inny.
- przeniesienie ładunku emocjonalnego z definiendum na definiens,
- przeniesienie ładunku emocjonalnego z definiensu na definiendum,
- wyparcie jednego zwrotu przez inny, mający odmienny ładunek emocjonalny.

W pierwszym wypadku definiowany termin ma w mowie potocznej stabilną pozycję i jest emocjonalnie aktywny. Naszym celem jest użycie tego ładunku emocjonalnego. Konstruujemy definicję w taki sposób, żeby ten ładunek przenieść na definiens, mający faktycznie inne znaczenie, niż definiendum. Przykładami mogą być wypowiedzi:

- zwycięstwo polega na tym, że pokonany nie czuje nienawiści do zwycieżcy (Mahatma Gandhi),
- parias jest to człowiek dający się ponieść złości (Budda),
- patriotą jest taki żołnierz, który bez wahania wykonuje każdy rozkaz dowódcy.

Z definicją perswazyjną drugiego typu mamy do czynienia wówczas, gdy definiens ma bardziej ustabilizowaną pozycję emocjonalną. Celem definicji perswazyjnej jest wówczas przeniesienie ładunku emocjonalnego z definiensa na definiendum, mające faktycznie inne znaczenie, niż definiens, na przykład:

- sztuką jest wszystko, cokolwiek artysta napluje (Kurt Schwitters, dadaista),
- biurokracja jest to zracjonalizowany aparat sprawnego załatwiania spraw (Szczepański, podręcznik do socjologii),
- kara śmierci jest to morderstwo w majestacie prawa.

Trzeci typ definicji perswazyjnej służy eliminacji z języka pewnych zwrotów o niepożądanym ładunku emocjonalnym i zastąpienie ich zwrotami o ładunku pożądanym. W ten sposób nazwa „czarny” została zastąpiona przez nazwę „murzyn”, następnie „kolorowy”, wreszcie „afroamerykanin”.

faszysta (każdy, kogo nie lubią antyfaszyści), średniowiecze, postępowy, nowoczesny, tolerancyjny

Pytania sugestywne.

- celowe błędy logiczne (np. przedwczesne uogólnienie),
- autorytet
- złodziejskie słowa,
- fachowy żargon,
- pozorny dylemat (*love it or leave it*),

- chochoł,
- terror matematyczny